

به نام خدا



تمرینات درس ریاضیات عمومی ۲ - رشته مهندسی مکانیک سری پنجم - انتگرال خط و سطح

مدرس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۰۴/۰۹

(۱) میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + (y + 1)\vec{j} + x\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید $\vec{F}$ یک میدان پایستار است. سپس، پتانسیل متناظر با آن را تعیین کنید.

(ب) مقدار انتگرال $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را در امتداد منحنی

$$C: x(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y(t) = 2t, \quad z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

از نقطه $(0, 0, 1)$ تا نقطه $(1, 2, 0)$ به دست آورید.

(۲) مقادیر a و b را چنان بیابید که میدان برداری

$$\vec{F}(x, y, z) = ax \ln(z)\vec{i} + by^2 z\vec{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^3\right)\vec{k},$$

بقا باشد. اگر C خط مستقیم از نقطه $(1, 1, 1)$ به نقطه $(2, 1, 2)$ باشد، مقدار انتگرال

$$\int_C 2x \ln(z) dx + 2y^2 z dy + y^3 dz,$$

را بیابید.

(۳) فرض کنید C شامل قوس نیم دایره بالایی دایره واحد از صفحه xy به همراه بازه $[-1, 1]$ از محور x ها باشد. در این صورت، درستی قضیه گرین برای انتگرال $\oint_C e^{x^2} dx + x dy$ را بررسی کنید.

(۴) فرض کنید M ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^3$ متشکل از نقاطی است که داخل مخروط $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ و بالای کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ قرار دارد. حجم M را یکبار به طور مستقیم و بار دیگر به کمک قضیه دیورژانس (با میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$) محاسبه کنید.

(۵) فرض کنید میدان برداری $F: \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت $F(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ تعریف شده است که در آن $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. همچنین فرض کنید S رویه به معادله $|x| + |y| + |z| = 1$ باشد که جهت قائم یکه بر آن رو به خارج است. انتگرال $\iint_S \vec{F} \cdot n d\sigma$ را محاسبه کنید.

(۶) مقدار ماکزیمم $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را در صورتی بیابید که

$$\vec{F} = (xy^2, 3z - xy^2, 4y - x^2y)$$

و C یک منحنی بسته ساده در صفحه $x + y + z = 1$ باشد که از بالا روی محور z خلاف جهت عقربه‌های ساعت جهت‌دار است. چه منحنی C ای این ماکزیمم را نتیجه می‌دهد.

«موفق باشید»