

به نام خدا



تمرینات درس حل عددی معادلات دیفرانسیل- رشته ریاضیات و کاربردها

مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۰۴/۰۲

مدرّس: حسینی

(۱) روش دو گامی ضمنی

$$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2h}{3}f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$y_0 = y(\circ), \quad y_1 = y_0 + hf(x_1, y_0),$$

که در آن $h = X_M/N$ و $x_n = nh$ ، $n = 0, \dots, N$ ، برای حل مساله مقدار اولیه

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \quad 0 \leq x \leq X_M, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

را در نظر بگیرید.

(الف) سازگاری روش را بررسی کنید. مرتبه دقت روش چند است؟

(ب) پایداری مطلق روش را بررسی کنید.

(پ) ناحیه پایداری مطلق روش را به دست آورید.

(۲) روش چند گامی خطی

$$y_{n+4} - y_n + \alpha(y_{n+3} - y_{n+1}) = h[\beta(f_{n+3} - f_{n+1}) + \gamma f_{n+2}],$$

که در آن $f_n = f(x_n, y(x_n))$ ، $x_n = x_0 + nh$ ، $n = 0, \dots, N$ ، برای حل مساله مقدار اولیه (۱) را در نظر بگیرید. α ، β و γ را طوری بیابید که روش از مرتبه ۳ باشد. آیا روش پایدار است؟

(۳) (الف) یک خانواده تک پارامتری از روش های دو گامی ضمنی

$$\sum_{j=0}^2 \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{n+j},$$

از بالاترین مرتبه ممکن بسازید و ثابت خطا را به دست آورید (با در نظر گرفتن α_1 ، به عنوان یک پارامتر، α_0 ، β_0 ، β_1 و β_2 را بر حسب α_1 به دست آورید. همچنین، α_2 را برابر ۱ در نظر بگیرید).

(ب) به ازای چه مقادیری از α_1 ، روش های حاصل از (الف) همگرایند. آیا می توان مرتبه روش را با انتخاب مناسبی از α_1 افزایش داد بدون اینکه همگرایی آن از بین رود؟

«موفق باشید»