

به نام خدا



تمرینات درس جبرخطی عددی- رشته علوم کامپیوتر سری دوم- روش های تکراری حل دستگاه معادلات خطی

مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۰۳/۰۷

مدرس: حسینی

(۱) دستگاه معادلات $Ax = b$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2/2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

دارای جواب دقیق $x = (1, 1)^T$ است. بردار مانده را به ازای $y = (2, 0)^T$ محاسبه کنید. سپس، مقدار خطای نسبی $\frac{\|x - y\|_2}{\|y\|_2}$ و $\frac{\|r\|_2}{\|b\|_2}$ را بیابید. آیا ماتریس A بد حالت است؟

(۲) (الف) بردارهای $x, \Delta x, b$ و Δb را در نظر بگیرید به طوری که $Ax = b$ و $A\Delta x = \Delta b$. نشان دهید

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، تخمینی برای $\text{cond}(A)$ نسبت به نرم $\|\cdot\|_\infty$ به دست آورید در صورتی که داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \Delta x = \begin{bmatrix} 0/4 \\ -0/9 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -0/9 \\ -5 \end{bmatrix},$$

(۳) جواب تقریبی دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 17, \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13, \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18, \end{aligned}$$

را با روش تکراری گاوس-سایدل و با حدس اولیه $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ بدست آورید (چهار تکرار انجام دهید).

(۴) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4/5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ -x_2 + 2x_3 &= -0/5, \end{aligned}$$

بهترین انتخاب ω برای پیاده سازی روش SOR را بیابید.

(۵) (الف) روش ژاکوبی برای حل دستگاه $AX = b$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

را بیان کنید.

(ب) نشان دهید

$$u_k = (\sin(k\pi h), \sin(2k\pi h), \dots, \sin(nk\pi h))^T, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

که در آن $h = 1/(n+1)$ ، بردارهای ویژه ماتریس تکرار T_j هستند.

(پ) نشان دهید روش به ازای هر تقریب اولیه $x^{(0)}$ ، همگراست.

(۶) (الف) روش تکراری

$$\begin{cases} Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, & \forall k \geq 1, \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ و مشخص} \end{cases}$$

که در آن $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ و M یک ماتریس ناتکین است، برای تقریب جواب دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ ، که در آن $A = M - N$ ، را در نظر بگیرید. نشان دهید روش همگراست اگر و تنها اگر $\rho(M^{-1}N) < 1$ ، بیانگر شعاع طیفی ماتریس است.

(ب) فرض کنید جواب دستگاه در گام k ام با خطایی به اندازه $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^n$ محاسبه شود، یعنی،

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b + \varepsilon_k.$$

همچنین، فرض کنید نرم برداری $\|\cdot\|$ و ثابت مثبت ε وجود دارند به طوری که به ازای هر $k \geq 0$ ، $\|\varepsilon_k\| \leq \varepsilon$. نشان دهید در صورت همگرایی روش، ثابتی مانند C مستقل از ε وجود دارد که تنها به $M^{-1}N$ وابسته است و

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\| \leq C\varepsilon.$$

«موفق باشید»