

به نام خدا



تمرینات درس جبرخطی عددی- رشته علوم کامپیوتر  
سری اول- مفاهیم مقدماتی جبرخطی

مدرّس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۲/۲۳

- (۱) در هر یک از گزاره‌های زیر استفاده از چه نرمی را پیشنهاد می‌کنید.
- (الف) محاسبه مسافتی که از درب ورودی دانشگاه تا کتابخانه مرکزی باید طی کرد.
  - (ب) محاسبه ارتفاع یک در به طوری که هر فرد زیر ۱/۶ متر بتواند بدون خم شدن از آن رد شود.
  - (پ) محاسبه اندازه باقی‌مانده پس از برازش داده‌ها با یک خط مستقیم در تقریب کمترین مربعات
  - (ت) اطمینان از اینکه همه مولفه‌های یک بردار خطا کمتر از  $10^{-3}$  باشند.
  - (ث) محاسبه تعداد خانه‌هایی که یک رخ باید برای رسیدن به یک موقعیت خاص در صفحه شطرنج انجام دهد (ممکن است بیش از یک حرکت نیاز باشد).

- (۲) (الف) نشان دهید به ازای هر نرم ماتریسی  $\|\cdot\|$  و هر ماتریس مربعی  $A$ ، در صورتی که  $\lambda$  یک مقدار ویژه ماتریس  $A^T A$  باشد، داریم

$$\lambda \leq \|A^T\| \|A\|.$$

- (ب) فرض کنید  $B$  یک ماتریس مربعی ناتکین باشد. نشان دهید

$$\kappa_2(B) \leq \sqrt{\kappa_1(B)\kappa_\infty(B)}$$

- (۳) نرم‌های برداری  $\|x\|_2$  و  $\|x\|_1$  و نرم‌های ماتریسی  $\|A\|_\infty$ ،  $\|A\|_1$  و  $\|A\|_F$  را برای بردار و ماتریس زیر به دست آورید.

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix},$$

(۴) فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . نشان دهید

$$(i) \|A\|_{\infty} \leq \sqrt{n} \|A\|_F; \quad (ii) \|A\|_F \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty}.$$

(۵) (الف) نشان دهید اگر ماتریس  $A$  با تبدیل مشابه  $P^{-1}AP$  قطری شود و  $B$  یک ماتریس دلخواه باشد آنگاه مقادیر ویژه  $A + B$  در اجتماع دایره‌های

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_k| \leq \kappa_{\infty}(P) \|B\|_{\infty}\},$$

قرار دارند که در آن  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  مقادیر ویژه ماتریس  $A$  بوده و  $\kappa_{\infty}(P)$  عدد حالت ماتریس  $P$  است.

(ب) نشان دهید همه مقادیر ویژه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

مثبت هستند.

(۶) (الف) یک تجزیه مقدار تکین برای ماتریس زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، دترمینان و شبه معکوس ماتریس  $A$  را به دست آورید.

«موفق باشید»