به نام خدا

جزوه درس جبر خطی عددی

منابع

۱- آنالیز عددی، ریچارد بوردن، ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده، اسماعیل بابلیان و محمدرضا امیدوار

2. Numerical Mathematics, A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri

سرفصل ها

۱- مروری بر مقدمات جبر خطی (فضاهای برداری، استقلال خطی، پایه فضا، بردار و ماتریس، ضرب داخلی، نرم بردارها و ماتریسها)

2- روش های مستقیم حل دستگاههای خطی (روش حذفی گاوس، محورگیری، تجزیه LU، حساسیت دستگاههای خطی و عدد حالت، پایداری روش گاوس، ماتریس های معین مثبت، تجزیه چولسکی و کروت)

3- روش های تکراری حل دستگاههای خطی (روش ژاکوبی، روش گاوس - سایدل، روش SOR)

5- نظریه تقریب (حل مساله کمترین مربعات و برازش داده ها)

4- تقریب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه (مقادیر و بردارهای ویژه، روش های توانی و QR برای تقریب مقادیر ویژه)

فصل اول: مروری بر مقدمات جبر خطی

جبر خطی آن شاخه از ریاضیات است که درباره‌ی خواص عام دستگاه‌هایی جبری متشکل از یک مجموعه همراه با مفهومی مناسب از نوعی «ترکیب خطی» از عناصر آن به بحث می‌پردازد.

در اینجا، مروری بر فضاهای برداری، استقلال خطی، پایه‌ی فضا و ضرب داخلی خواهیم داشت.

فضای برداری:

تعریف. اگر F یک میدان و V یک گروه آبلی جمعی باشد و یک ضرب عددی برای ضرب هر عضو x از F، در هر عضو v از V تعریف شده باشد، به طوری که عضو منحصربفرد xv از V را نتیجه دهد و به ازای هر x و y از F و هر u و v از V داشته باشیم:

الف) $x(u+v) = xu + xv$ ؛

ب) $(x+y)u = xu + yu$ ؛

ج) $(xy)v = x(yv)$ ؛

د) $1v = v$ ؛

در این صورت V یک فضای برداری روی میدان F نامیده می‌شود.
نام «بردار» عمدتاً به جهت سهولت به عناصر مجموعه‌ی V اطلاق می‌شود.

تعریف. اگر V یک فضای برداری روی میدان F و W زیرمجموعه‌ای از V باشد، آن‌گاه W یک زیرفضای V نامیده می‌شود، هرگاه با اعمال تعریف شده روی V یک فضای برداری روی میدان F باشد.

قضیه. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و W زیرمجموعه‌ای غیرتهی از V باشد. آن‌گاه W یک زیرفضای V است اگر و تنها اگر دارای خواص زیر باشد:

(الف) اگر $a,b\in W$، آن‌گاه $a+b\in W$؛

(ب) اگر $\lambda\in F$ و $a\in W$، آن‌گاه $\lambda a\in W$.

برهان: ($\Leftarrow$) فرض کنیم W زیرفضایی از V و a و b دو بردار از W و λ یک اسکالر در F باشد. در این صورت بوضوح $a+b$ و λa در W قرار دارند.

($\Rightarrow$): فرض کنیم W زیرمجموعه‌ای غیرتهی از V باشد که برای همه بردارهای a و b از W و همه اسکالرهای λ از F، بردارهای $a+b$ و ca در W قرار دارند. چون W غیرتهی است، برداری مانند α در W موجود است و بنابراین $(-1)\alpha$ و در نتیجه $-\alpha+\alpha=0$ در W است. در این صورت، اگر β برداری دلخواه از W و λ اسکالری دلخواه باشد، بردار $c\beta$ به W تعلق دارد (بنا به فرض) و به ویژه $(-1)\beta=-\beta$ نیز در W است. سرانجام، اگر α و β در W باشند، آن‌گاه بردار $\alpha+\beta$ نیز بنا به فرض در W است. بنابراین W به عنوان زیرمجموعه‌ای از V یک گروه آبلی جمعی است که برای هر عضو ω از W و λ از F، $\lambda\omega$ نیز در W قرار دارد، لذا W یک زیرفضای V است. ▲

تعریف. بردار v از V یک «ترکیب خطی» از بردارهای $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ از V نامیده می‌شود، هرگاه اسکالرهایی چون $c_1,\dots,c_n$ در F وجود داشته باشند به طوری که

$$v=\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$$

تعریف. فرض کنید S مجموعه‌ای از بردارهای فضای برداری V باشد. «زیرفضای تولید شده توسط S» (W)، بنا به تعریف، عبارت است از اشتراک همه زیرفضاهای V که شامل S باشند. هنگامی که S مجموعه‌ای متناهی از بردارها باشد،

یعنی $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$، W را زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ نیز می‌نامیم.

تعریف. فرض کنید V فضای برداری روی میدان F باشد. زیرمجموعه S از V وابستهٔ خطی نامیده می‌شود هرگاه بردارهای متمایزی مانند $v_1, v_2, \ldots, v_n$ در S و اسکالرهایی مانند $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ که همگی باهم صفر نیستند $\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \neq 0\right)$ در F یافت شود، به طوری که

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 .$$

مجموعه‌ای که وابستهٔ خطی نباشد، مستقل خطی (یا دارای استقلال خطی) نام دارد. اگر مجموعه S تنها شامل تعداد متناهی بردار $v_1, v_2, \ldots, v_n$ باشد، گاهی بجای اینکه بگوییم S وابسته (یا مستقل) خطی است می‌گوییم $v_1, v_2, \ldots, v_n$ وابسته (یا مستقل) خطی هستند.

تذکر:

1. هر مجموعه که شامل یک مجموعه وابستهٔ خطی باشد خود وابستهٔ خطی است؛

2. هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی، مجموعه‌ای است مستقل خطی؛

3. هر مجموعه‌ای که شامل بردار 0 باشد، وابستهٔ خطی است؛ زیرا $1.0=0$ ؛

4. مجموعه S از بردارها، مستقل خطی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه متناهی S مستقل خطی باشد؛ یعنی اگر و تنها اگر به ازای هر چند بردار متمایز $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ از S، تساوی $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=0$ ایجاب کند که $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|=0$، یعنی همهٔ λ_iها صفرند.

تعریف. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. زیرمجموعه B از V را یک پایه V گوییم هرگاه B مستقل خطی باشد و زیرمجموعه B فضای V را تولید کند.

فضای V دارای «بُعد» متناهی است هرگاه یک پایهٔ متناهی داشته باشد و بُعد فضای برداری با بُعد متناهی V که به صورت $\dim(V)$ نوشته می‌شود عبارت است از تعداد بردارهای یک پایه برای V.

مسائل.

مسئله‌ی 1. فرض کنید F یک میدان متناهی و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. تعداد اعضای V را بیابید.

حل. فرض کنید $|F|=q$ و $\dim V=n$ و $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V باشد. تابع $\varphi:\overbrace{F\times F\times\cdots\times F}^{n\text{ بار}}\longrightarrow V$ با ضابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n$$

این تابع پوشاست؛ زیرا اگر $v\in V$ دلخواه باشد، آن‌گاه اسکالرهای $b_1,\dots,b_n$ وجود دارند بطوری که $v=b_1v_1+\cdots+b_nv_n$، بنابراین $\varphi(b_1,b_2,\dots,b_n)=v$. این تابع 1-1 نیز است؛ زیرا اگر

$$\varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\varphi(\lambda_1',\lambda_2',\dots,\lambda_n')\Longrightarrow\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n=\lambda_1'v_1+\lambda_2'v_2+\cdots+\lambda_n'v_n$$

$$\Longrightarrow(\lambda_1-\lambda_1')v_1+(\lambda_2-\lambda_2')v_2+\cdots+(\lambda_n-\lambda_n')v_n=0$$

و چون $\{v_1,\dots,v_n\}$ مستقل خطی می‌باشند، پس

$$\lambda_1=\lambda_1',\ \lambda_2=\lambda_2',\dots,\lambda_n=\lambda_n'\Longrightarrow(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=(\lambda_1',\lambda_2',\dots,\lambda_n')$$

بنابراین تعداد اعضای V و $\overbrace{F\times F\times\cdots\times F}^{n\text{ بار}}$ باهم برابر است؛ لذا

$$|V|=|F|\cdot|F|\cdots|F|=q^n.$$

مسئله 2. فرض کنید W مجموعه‌ی تمام nتایی‌های مرتب از $\mathbb{R}^n$ مانند $(x_1,\dots,x_n)$ باشد به طوری که مولفه‌های فرد آن باهم برابرند. $(x_1=x_3=x_5=\cdots)$

(آ) ثابت کنید W زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است؛

(ب) یک پایه برای W ارائه دهید و بعد W را مشخص کنید. (کارشناسی ارشد 65)

5

حل. (الف) برای اینکه ثابت کنیم L یک زیرفضاست کافی است ثابت کنیم برای هر x و y در L و λ در $\mathbb{R}$، $\lambda x+y$ نیز در L است.

فرض کنیم $x=(x_1,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,\dots,y_n)$ عناصری دلخواه در L باشند، پس مولفه‌های فرد x باهم برابرند و مولفه‌های فرد y نیز باهم برابرند. حال اگر $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\lambda x+y=\lambda(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(\lambda x_1+y_1,\dots,\lambda x_n+y_n)$$

حال اگر λx_i+y_i و λx_j+y_j دو مولفه‌ی فرد $\lambda x+y$ باشند، با توجه به اینکه $x_i=x_j$ و $y_i=y_j$، پس $\lambda x_i+y_i=\lambda x_j+y_j$،

در نتیجه $\lambda x+y\in L$. لذا L زیرفضاست.

(ب) - اگر n فرد باشد، مجموعه‌ی زیر یک پایه برای L است: (چون استقلال خطی اند و L را تولید می‌کنند)

$$\{(1,0,1,0,\dots,1),e_2,e_4,\dots,e_{n-1}\}$$

که در آن e_k برداری است که مولفه‌ی kام آن یک و بقیه صفر است. در نتیجه $=\frac{n-1}{2}+1$ $\dim(L)=\frac{n+1}{2}$.

- اگر n زوج باشد، مجموعه‌ی زیر یک پایه برای L است:

$$\{(1,0,1,0,\dots,1,0),e_2,e_4,\dots,e_n\}$$

در نتیجه $\dim(L)=\frac{n}{2}+1$.

فصل دوم: روش های مستقیم حل دستگاههای خطی

مقدمه

دستگاههای معادلات خطی با بیشتر مسایل مهندسی و علوم در ارتباط هستند، همان طور که با کاربردهای ریاضیات در علوم اجتماعی و مطالعه کمی تجارت و مسایل اقتصادی ارتباط دارند.

در این فصل، روش های مستقیم برای حل دستگاههای خطی را مورد بررسی قرار می دهیم. در این روش ها، چنانچه دستگاه دارای جواب یکتا باشد، پس از چند مرحله و با تعداد متناهی عمل (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) این جواب بدست می آید، که می تواند همراه با خطای گرد کردن (ناشی از حل کامپیوتری) باشد. در ادامه این فصل، خطاهای ناشی از حل کامپیوتری مسائل را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و روش های کنترل و کاهش خطاها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

قبل از بیان روش های مستقیم برای حل دستگاههای خطی، به طور مختصر به معرفی بردارها و انواع ماتریس ها می پردازیم.

تعریف. فرض کنید $m,n\in\mathbb{Z}^+$. ماتریسی با m سطر و n ستون (یا یک ماتریس $m\times n$، یا یک ماتریس (m,n)) با مولفه هایی در میدان $\mathbb{F}$، مجموعه ای از mn اسکالر $a_{ij}\in\mathbb{F}$، $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$، است که به شکل آرایه مستطیلی زیر نمایش داده می شود

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- اگر $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{F}=\mathbb{C}$، به ترتیب $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ و $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$.

مجموعه $(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$ سطر iام A و به طور مشابه $(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{mj})$ ستون jام A نامیده می شود.

- اگر $m=n$، ماتریس را یک ماتریس مربعی از مرتبه n یا به طور ساده، یک ماتریس مرتبه n می نامند.

- مجموعه مولفه های $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ را قطر اصلی ماتریس مربعی مرتبه n می نامند.

- ماتریس دارای یک سطر یا یک ستون، بردار سطری یا بردار ستونی نامیده می شود.

در این فصل هر بردار را بردار ستونی در نظر می گیریم مگر اینکه خلاف این مطلب ذکر شود.

تعریف. فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد و

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m,$$
$$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_l \le n,$$

ماتریس S با مولفه های $s_{pq} = a_{i_p j_q}$ با $p=1,\ldots,k$ ، $q=1,\ldots,l$ یک زیرماتریس A نامیده می شود. اگر $k=l$ و $i_r = j_r$ ، $r=1,\ldots,k$ آنگاه S را یک "زیرماتریس اصلی" A می نامند.

مثال. با فرض $(m,n)=(4,6)$ ، $k=2$ ، $l=3$ و

$$i_1=2, \; i_2=4$$
$$j_1=3, \; j_2=4, \; j_3=6$$

ماتریس S زیرماتریسی از ماتریس A است که مولفه های آن به صورت زیر است

$$S=\begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{26} \\ a_{43} & a_{44} & a_{46} \end{pmatrix}$$

اگر $k=l=2$ و $i_1=2, i_2=4$ و $j_1=2$ ، $j_2=4$ آنگاه ماتریس مربعی S که یک زیرماتریس اصلی از ماتریس A به شکل زیر است

$$S=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

تعریف. یک زیرماتریس اصلی پیشروی مرتبه k $(k=1,2,\dots,n)$ از ماتریس مربعی n، $A=(a_{ij})$

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

تعریف. ماتریس مربعی A از مرتبه n، معکوس پذیر (نامنفرد، ناتکین) نامیده می‌شود هرگاه ماتریس مربعی B از مرتبه n چنان وجود داشته باشد که $AB=BA=I$.

در این صورت، B را معکوس A نامیده و با A^{-1} نمایش می‌دهند. اگر A معکوس پذیر نباشد تکین (منفرد) نامیده می‌شود.

تبصره. اگر A معکوس پذیر باشد آن‌گاه معکوس آن هم معکوس پذیر است و $A=(A^{-1})^{-1}$.

همچنین، اگر A و B دو ماتریس معکوس پذیر باشند (از مرتبه یکسان n) آن‌گاه AB نیز معکوس پذیر است و $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

تبصره. یک ماتریس مربعی، معکوس پذیر است اگر و تنها اگر بردارهای ستونی آن مستقل خطی باشند.

تعریف. ترانهاده ماتریس $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$، ماتریسی از بعد $n\times m$ است که از تعویض جای سطر و ستون‌های ماتریس A بدست می‌آید و با A^T نشان داده می‌شود.

به وضوح داریم

$$(A+B)^T=A^T+B^T,\quad (A^T)^T=A$$

$$(AB)^T=B^TA^T,\quad (\alpha A)^T=\alpha A^T,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

If A معکوس‌پذیر then $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

تعریف. فرض کنید $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$. ماتریس $B=A^H\in\mathbb{C}^{n\times m}$ ترانهاده مزدوج A نامیده می‌شود هرگاه $b_{ij}=\bar{a}_{ji}$ که در آن $\bar{a}_{ji}$ مزدوج عدد مختلط a_{ij} است.

در این حالت داریم

$$(A+B)^H=A^H+B^H,\quad (AB)^H=B^HA^H,\quad (\alpha A)^H=\bar{\alpha}A^H,\ \alpha\in\mathbb{C}$$

تعریف. ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ متقارن نامیده می‌شود هرگاه $A=A^T$. همچنین، پادمتقارن است هرگاه $A=-A^T$. علاوه براین، ماتریس A متعامد نامیده می‌شود اگر $AA^T=A^TA=I$، یعنی، $A^T=A^{-1}$.

تعریف. اگر $(k_1,\dots,k_n)$ جایگشتی دلخواه از اعداد $(1,2,\dots,n)$ باشد، ماتریس جایگشت از مرتبه n متناظر با این جایگشت به صورت $P=(P_{ij})$ تعریف می‌شود که در آن

$$P_{ij}=\begin{cases}1, & j=k_i\\ 0, & j\neq k_i\end{cases}=\delta_{k_i j} \qquad (1)$$

مثال: ماتریس

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

یک ماتریس جایگشت است. اگر $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ آن‌گاه ماتریس حاصل‌ضرب PA ماتریسی است که فقط جای دو سطر دوم و سوم A تعویض شده است

$$PA=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$$

در حالت کلی، اگر $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و عناصر ماتریس P به صورت (1) تعریف شوند آن‌گاه

$$PA=\begin{bmatrix}a_{k_1 1}&a_{k_1 2}&\cdots&a_{k_1 n}\\a_{k_2 1}&a_{k_2 2}&\cdots&a_{k_2 n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k_n 1}&a_{k_n 2}&\cdots&a_{k_n n}\end{bmatrix}$$

تبصره. هر ماتریس جایگشت، ماتریسی معکوس‌پذیر است. همچنین برای یک ماتریس جایگشت مانند P داریم

$$P^{-1}=P^T$$

یعنی هر ماتریس جایگشت، ماتریسی متعامد است.

تعریف. ماتریس $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس هرمیتی (خودالحاق) نامیده می‌شود اگر $\bar{A}^T=\bar{A}$، یعنی، $A^H=A$. ماتریس $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$، ماتریس یکانی نامیده می‌شود اگر $A^HA=AA^H=I$.
و در نهایت، ماتریس $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$، ماتریس نرمال نامیده می‌شود هرگاه $AA^H=A^HA$.

تعریف. ماتریس A $(m\times n)$، ماتریس بلوکی (افراز شده یا افراز شده بلوکی) نامیده می‌شود هرگاه

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix},$$

که در آن A_{ij} ها زیرماتریس‌های A هستند.

تبصره. فرض کنید A و B ماتریس‌های بلوکی به شکل

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

باشند که در آن A_{ij} و B_{ij} ماتریس‌های $(k_i\times l_j)$ و $(m_i\times n_j)$ هستند.
در این صورت

(الف)
$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{k1} & \cdots & \lambda A_{kl} \end{pmatrix}, \lambda\in\mathbb{C}\ ; \quad A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{k1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1l}^T & \cdots & A_{kl}^T \end{pmatrix};$$

(ب) اگر $k=m$، $l=n$، $m_i=k_i$ و $n_j=l_j$، آنگاه

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1l}+B_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1}+B_{k1} & \cdots & A_{kl}+B_{kl} \end{pmatrix};$$

د) اگر $l=m$ و $l_i=m_i$ آن‌گاه با قرار دادن $C_{ij}=\sum_{s=1}^{m} A_{is}B_{sj}$ داریم

$$AB=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k1} & \cdots & C_{kn} \end{bmatrix}$$

تعریف. یک ماتریس $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $(H\in\mathbb{C}^{m\times n})$ ماتریس هسنبرگ پایینی (یا پایین هسنبرگ) نامیده می‌شود هرگاه به شکل زیر باشد

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & & \\ h_{21} & h_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & h_{m-1,n} \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}$$

و هسنبرگ بالائی (بالا هسنبرگ) نامیده می‌شود هرگاه

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{m,n-1} & h_{mn} \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های ذوزنقه‌ای و مثلثی

ماتریس $A\ (m\times n)$ را بالا ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $j<i$، $a_{ij}=0$، همچنین پایین ذوزنقه‌ای است هرگاه به ازای $j>i$، $a_{ij}=0$. نام ذوزنقه‌ای بر این خاطر بر این ماتریس‌ها داده شده است که در حالت بالا ذوزنقه‌ای با $m<n$، عناصر غیر صفر تشکیل یک ذوزنقه می‌دهند.

$$m=3,\ n=4,\quad A=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

ماتریس مثلثی: یک ماتریس ذوزنقه‌ای از مرتبه n می‌باشد.

$$L=\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad , \quad U=\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

ماتریس نواری:

ماتریس $A\in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) نوار پایینی p دارد هرگاه به ازای هر $i>j+p$ ، $a_{ij}=0$ ؛

همچنین، نوار بالایی q دارد هرگاه به ازای هر $j>i+q$ ، $a_{ij}=0$.

- ماتریس‌های قطری، ماتریس‌های نواری با $p=q=0$ هستند.

- ماتریس‌های بالا ذوزنقه‌ای، ماتریس‌های نواری با $p=0, q=n-1$ و ماتریس‌های پایین ذوزنقه‌ای، ماتریس‌های نواری با $q=0$ و $p=m-1$ هستند.

- ماتریس‌های سه‌قطری، ماتریس‌های نواری با $p=q=1$ هستند.

- ماتریس‌های دوقطری بالا، ماتریس‌های نواری با $p=0, q=1$ و ماتریس‌های دوقطری پایین، ماتریس‌های نواری با $p=1, q=0$ هستند.

- ماتریس‌های پایین هسنبرگ، ماتریس‌های نواری با $p=m-1$ و $q=1$

و ماتریس‌های بالا هسنبرگ، ماتریس‌های نواری با $p=1$ و $q=n-1$ هستند.

دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی به شکل کلی زیر است

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2)$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

یا به شکل ماتریسی

$$AX = b \qquad (3)$$

که در آن

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

قضیه زیر را از جبر خطی مقدماتی بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه. دستگاه (3) دارای جواب یکتا است اگر و تنها اگر $\det(A) \neq 0$.

دستگاههای هم‌ارز

فرض کنید دو دستگاه $AX=b$ و $BX=d$ که هر کدام شامل n معادله و n مجهول هستند، مشخص باشند. اگر دو دستگاه، به طور دقیق یک جواب داشته باشند، آن‌ها را دستگاههای هم ارزی نامند.

بنابراین برای حل یک دستگاه ابتدا می‌توان دستگاه هم ارز آن را به جای آن دستگاه حل کرد. در این صورت، هیچ جوابی کم نمی‌شود یا هیچ جوابی اضافه نمی‌گردد. این ایده ساده، اساس روبه عددی این بخش است. در واقع، با عملیات مقدماتی خاصی، دستگاه معادلات مفروض را به دستگاه هم ارز ساده‌تری (پایین یا بالا مثلثی) تبدیل و سپس آن را به جای دستگاه اولیه حل می‌کنیم.

اعمال مقدماتی (سطری مقدماتی)

فرض کنید E_i بیانگر iامین معادله دستگاه (2) باشد. در این صورت، اعمال سطری مقدماتی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

(i) تعویض دو معادله در دستگاه ($E_i \leftrightarrow E_j$)؛

(ii) ضرب یک عدد حقیقی ناصفر در یک معادله ($\lambda E_i \longrightarrow E_i$)؛

(iii) افزودن مضربی از یک معادله به معادله دیگر ($E_i+\lambda E_j \longrightarrow E_i$).

قضیه. اگر یک دستگاه معادلات از دستگاه دیگر با یک دنباله متناهی از اعمال سطری مقدماتی بدست آید، آن دو دستگاه هم ارزند.

روش حذفی گاوس[1] برای حل دستگاههای خطی

اساس کار روش حذفی گاوس بر حذف ساده مجهولات و تبدیل دستگاه به یک دستگاه بالامثلثی هم ارز است که با استفاده از جایگذاری پسرو، جواب دستگاه تعیین می‌شود.

با توجه به اینکه در اجرای محاسبات لزومی ندارد که همه معادلات در هر مرحله نوشته شوند یا مجهولات در طول محاسبات تکرار شوند. تنها تغییری که از دستگاهی به دستگاه دیگر رخ می‌دهد در ضرایب مجهولات و مقادیر طرف راست معادلات است. بنابراین یک دستگاه خطی با یک ماتریس که شامل همه اطلاعات لازم، فشرده شده، جهت تعیین جواب‌های آن است جایگزین می‌شود. ماتریس فوق را ماتریس افزوده نامیده و به صورت زیر تشکیل می‌دهند

$$\tilde{A}=[A,b]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

که در آن

$$a_{i,n+1}=b_i \quad , i=1,2,\dots,n$$

---

1 GEM (Gaussian Elimination Method)

مراحل روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی را می‌توان در گام‌های زیر خلاصه کرد.

گام 1 (صفر کردن عناصر زیر a_{11}، حذف در ستون 1)

فرض کنید $a_{11} \neq 0$، در این صورت a_{11} را "درایه محوری" نامیم. اگر $a_{11}=0$ آن‌گاه سطر اول ماتریس افزوده را با سطری که اولین درایه آن صفر نیست، تعویض می‌کنیم. فرض کنید

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i=2,3,\dots,n,$$ (m_{i1} را ضرب‌کننده نامند)

و m_{i1} برابر سطر اول را از سطر iام، $i=2,3,\dots,n$ اضافه کنید ($E_i - m_{i1}E_1 \to E_i$)

در این صورت

$$[A|b]^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{array}\right],$$

که در آن

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad i=2,3,\dots,n, \quad j=2,3,\dots,n+1$$

گام 2 (صفر کردن عناصر زیر $a_{22}^{(1)}$ - حذف در ستون 2)

فرض کنید $a_{22}^{(1)} \neq 0$ که در این صورت آن را دومین درایه محوری نامیم (اگر $a_{22}^{(1)}=0$ آن‌گاه سطر 2 را با یکی از سطرهای بعدی که در آن دومین درایه صفر نباشد تعویض می‌کنیم). فرض کنید

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i=3,4,\dots,n,$$

و $-m_{i2}$ برابر سطر دوم را به سطر iام، $i=3,4,\dots,n$ اضافه کنید. در این صورت

$$[A|b]^{(2)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{array}\right],$$

که در آن

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)} \quad , i=3,4,\dots,n, \quad j=3,4,\dots,n+1$$

با ادامه روند فوق، ماتریس افزوده در گام $n-1$ به صورت زیر در می‌آید

$$[A|b]^{(n-1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{array}\right],$$

که در آن

$$a_{ij}^{(n-1)} = a_{ij}^{(n-2)} - m_{i,n-1} a_{n-1,j}^{(n-2)} \quad , i=n, \quad j=n,n+1$$

در این مرحله، ماتریس ضرایب بالامثلثی است و در نتیجه دستگاه معادلات متناظر با آن نیز یک دستگاه بالامثلثی است که می‌توان آن را با استفاده از جایگذاری پسرو به صورت زیر حل کرد:

با توجه به سطر آخر ماتریس افزوده $[A|b]^{(n-1)}$ داریم

$$a_{nn}^{(n-1)} x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)} \Rightarrow x_n = \frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \qquad (4)$$

معادله قبل از سطر آخر به صورت زیر است

$$a_{n-1,n-1}^{(n-2)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n = a_{n-1,n+1}^{(n-2)} \qquad (5)$$

با جایگذاری (4) در (5) و حل معادله خطی (5) مقدار x_{n-1} بدست می‌آید.

با ادامه این روند، از معادله اول مقدار x_1 بدست می‌آید.

مثال 1 . نشان دهید اگر در هر یک از گام های روش حذفی گاوس، درایه محوری مخالف صفر نتوان یافت آن گاه $\det(A)=0$ و دستگاه یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد.

مثال 2 . دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

مثال 1.

فرض کنید بعد از چندبار اعمال سطری مقدماتی، ماتریس A به ماتریس $\tilde{A}$ تبدیل شده است (یا به طور معادل، دستگاه $AX=b$ به دستگاه $\tilde{A}X=\tilde{b}$ تبدیل شده است) که در آن $\tilde{A}$ عنصر محوری ناصفر ندارد، یعنی، $\tilde{A}$ به شکل

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

است که B ماتریسی مربعی و بالامثلثی ناصفر است ولی اولین ستون D صفر است. بنابراین

$$\det(\tilde{A})=\det(B)\cdot\det(D)=0$$

لذا $\tilde{A}$ منفرد است. همچنین، از آنجایی که هم‌ارزی دستگاه $AX=b$ و $\tilde{A}X=\tilde{b}$ را نتیجه می‌دهد، می‌توان گفت A ناصفر است اگر و تنها اگر $\tilde{A}$ ناصفر باشد. بنابراین A نیز تکین (منفرد) است. به عبارت دیگر $\det(A)=0$ و در نتیجه، دستگاه $AX=b$ یا جواب ندارد و یا بی‌شمار جواب دارد.

جواب. فرض کنید بعد از چند بار به‌کار بردن اعمال سطری مقدماتی ماتریس A به $\tilde{A}$ (به‌طور معادل، دستگاه $Ax = b$ به $\tilde{A}x = \tilde{b}$) تبدیل شود به‌طوری‌که $\tilde{A}$، شامل درایه محوری غیر صفر نباشد. به عبارت دیگر، $\tilde{A}$ ماتریسی به صورت

$$\begin{bmatrix} B & C \\ \bar{O} & D \end{bmatrix}$$

باشد که در آن B ماتریس مربعی و بالا مثلثی ناتکین است و اولین ستون D نیز صفر است. بنابراین $\det(\tilde{A}) = ۰$ و در نتیجه $\tilde{A}$ یک ماتریس تکین است. لذا بنا به قضیه ۳.۲، A نیز یک ماتریس تکین است. بنابراین، دستگاه متناظر با آن یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد.

■

مثال ۵.۲ دستگاه زیر را با GEM حل کنید.

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ &= ۰, \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ &= ۳, \\ -x_۱ - ۳x_۲ &= ۲. \end{aligned}$$

جواب. ماتریس افزوده متناظر با دستگاه به صورت

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۳ & ۳ \\ -۱ & -۳ & ۰ & ۲ \end{array}\right],$$

است. با محاسبه ضرب‌گرها و اجرای گام به گام روش حذفی گاوس داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۳ & ۳ \\ -۱ & -۳ & ۰ & ۲ \end{array}\right] \xrightarrow[m_{۳۱}=-۱]{m_{۲۱}=۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۲ \end{array}\right] \xrightarrow{m_{۳۲}=\frac{۱}{۲}} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{array}\right].$$

با استفاده از روش جایگذاری پسرو داریم

$$x_۳ = ۱, \quad x_۲ = -۱, \quad x_۱ = ۱.$$

■

۱.۴.۲ تعداد اعمال حسابی برای حل دستگاه معادلات خطی با GEM

در GEM دو مرحله جداگانه انجام می‌شود تا یک دستگاه معادلات خطی حل شود. الف) مثلثی کردن دستگاه؛ ب) حل دستگاه مثلثی.

در نتیجه، کل اعمال حسابی برای حل دستگاه n معادله با n مجهول با GEM عبارتند از:

$$\text{تعداد تقسیم‌ها} = \frac{n(n-1)}{2} + n;$$
$$\text{تعداد ضرب‌ها} = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6};$$
$$\text{تعداد جمع‌ها} = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}.$$

لذا کل اعمال حسابی برای GEM برابر

$$\frac{2n^3}{3} + n^2 - \frac{5n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{6} = \mathcal{O}(n^3),$$

است.

۵.۲ محورگیری

اجرای الگوریتم GEM به شکل ساده برای حل دستگاه معادلات، ممکن است با شکست مواجه گردد. برای نشان دادن این موضوع مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

اجرای ساده GEM ناموفق است، زیرا راهی برای افزودن مضربی از معادله اول به معادله دوم برای به‌دست آوردن یک ضریب صفر x_1 در معادله دوم وجود ندارد. همان‌طور که قبلاً نیز توضیح داده شد، برای رفع این مشکل بایستی یک تعویض سطر انجام داد (به عنوان مثال، تعویض سطر سوم با سطر اول). این عمل را ”محورگیری[5]“ می‌نامند.

ولی در عمل، اغلب انجام تعویض سطرها، حتی وقتی درایه‌های محوری صفر نباشند، مطلوب و مورد نیاز است. به عنوان مثال، دستگاه

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

را در نظر بگیرید که در آن ε یک عدد مخالف صفر می‌باشد. به ازای $\varepsilon = 0$، این دستگاه همان دستگاه (۵.۲) است. بنابراین اگر $\varepsilon \to 0$، جواب دستگاه (۶.۲) با جواب دستگاه (۵.۲)، یعنی

[5] Pivoting

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$ یکی خواهد شد. با اجرای اولین مرحله GEM روی این دستگاه خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & -1 & 1 \\ 0 & 2-\varepsilon^{-1} & -1+\varepsilon^{-1} \\ 0 & -1+2\varepsilon^{-1} & -2\varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{۷.۲}$$

حال اگر ε به اندازه کافی کوچک باشد، در محاسبه ماشینی مؤلفه‌ای مانند $2-\varepsilon^{-1}$، پس از محاسبه به همان اندازه $-\varepsilon^{-1}$ خواهد بود. در واقع، قبل از اینکه تفریق بتواند انجام شود، نماهای نمایش ممیز شناور ۲ و ε^{-1} باید با یک جابجایی ممیز، موافق هم گردند که اگر این جابجایی به اندازه کافی بزرگ باشد، مانتیس عدد ۲ صفر خواهند شد. به عنوان مثال، در یک ماشین هفت رقمی با $\varepsilon = 10^{-8}$ داریم

$$\varepsilon^{-1} = 0.1000000 \times 10^{9}, \quad 2 = 0.2000000 \times 10^{1}.$$

اگر ۲ با نمای ۹ نوشته شوند، داریم $2 = 0.000000002 \times 10^{9}$ و در نتیجه

$$2 - \varepsilon^{-1} = -0.0999999998 \times 10^{9}.$$

بنابراین در ماشین هفت رقمی داریم

$$2 - \varepsilon^{-1} = -0.1000000 \times 10^{9} = -\varepsilon^{-1}.$$

از این‌رو، تحت این شرایط محاسباتی، دستگاه معادلات (۷.۲) به صورت

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & -1 & 1 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \\ 0 & 2\varepsilon^{-1} & -2\varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{۸.۲}$$

ذخیره می‌شود. با توجه به اینکه معادلات دوم و سوم دستگاه (۸.۲) در تناقض با یکدیگر هستند، روند حل دستگاه با GEM با شکست مواجه می‌شود.

مثال بعد، نشان خواهد داد که در حقیقت، کوچکی ضریب a_{11} باعث پدید آمدن این مشکل نمی‌شود؛ بلکه کوچکی a_{11} نسبت به سایر عناصر هم‌سطرش این مشکل را به‌وجود می‌آورد. دستگاه

$$\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{۹.۲}$$

را در نظر بگیرید که با دستگاه (۶.۲) معادل است. با اجرای اولین مرحله GEM روی این دستگاه داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \\ 0 & 2-\varepsilon^{-1} & -1+\varepsilon^{-1} \\ 0 & -1+2\varepsilon^{-1} & -2\varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{۱۰.۲}$$

در اینجا نیز، مشابه قبل، به ازای مقادیر به اندازه کافی کوچک از ε و تحت شرایط محاسباتی، دستگاه (۱۰.۲) به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \\ 0 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \\ 0 & 2\varepsilon^{-1} & -2\varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{۱۱.۲}$$

ذخیره می‌شود. دوباره، با توجه به اینکه معادلات دوم و سوم دستگاه (۱۱.۲) در تناقض با یکدیگر هستند، روند حل دستگاه با GEM با شکست مواجه می‌شود.

اگر ترتیب معادلات این دستگاه‌ها عوض شود، این مشکلات را نخواهیم داشت. به عنوان مثال، با تغییر ترتیب سطرهای اول و سوم دستگاه (۶.۲) خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ \varepsilon & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

که با اجرای GEM روی این دستگاه، خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1+\varepsilon}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1-2\varepsilon}{3} \end{bmatrix},$$

و در نتیجه، برای مقادیر به اندازه کافی کوچک از ε و با استفاده از الگوریتم جایگذاری پسرو، داریم

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1-2\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx 1, \\ x_2 = \dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2} + x_2) \approx 1, \\ x_1 = \dfrac{1}{2}(1 + x_2) \approx 1. \end{cases}$$

با توجه به مثال‌های بالا انتظار می‌رود یک الگوریتم خوب، بتواند در صورت لزوم معادلات یک دستگاه را جابه‌جا نماید. بنابراین، بایستی *"سطر محوری"* را با یک روش منطقی انتخاب نماییم. برای دستیابی به این هدف، راهکارهای زیر معرفی می‌شوند.

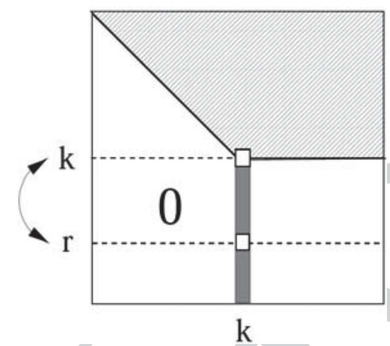
۱.۵.۲ محورگیری ستونی ماکزیمال یا محورگیری جزئی

ساده‌ترین راهکار برای انتخاب سطر محوری، روش *"محورگیری جزئی"* (*یا محورگیری ستونی ماکزیمال*) است. در این روش، درایه‌ای در همان ستون از درایه‌های روی و زیر قطر که بیشترین قدرمطلق را داشته

باشد، به عنوان درایه محوری انتخاب می‌شود، یعنی، در هر مرحله از GEM عدد صحیح $r \geq k$ چنان اختیار می‌شود که

$$\left|a_{rk}^{(k-۱)}\right| = \max_{k \leq i \leq n} \left|a_{ik}^{(k-۱)}\right|, \quad (a_{ij}^{(\circ)} = a_{ij}).$$

حال اگر $r = k$، نیازی به تعویض سطر نیست، در غیر این صورت، سطر kام با سطر rام تعویض می‌شود (شکل ۱.۲ را ببینید).



شکل ۱.۲ : ناحیه تیره پُررنگ، نشان دهنده درایه‌هایی است که در جستجوی درایه محوری شامل می‌شوند.

نکته ۶.۲ لازم به ذکر است در صورتی که ضرب‌گرهای m_{ik} در GEM کوچک‌تر از یک باشند، می‌تواند مفید باشد. زیرا، ممکن است درایه‌های $a_{kj}^{(k)}$ خطا داشته باشند (خطای گردکردن) که با ضرب m_{ik} در آن، خطا کمتر شده و حالت پایداری رخ می‌دهد.
در واقع، وقتی محورگیری (محورگیری با راهکار محورگیری جزئی) انجام می‌شود، این اتفاق برای مقادیر m_{ik} رخ می‌دهد. یعنی، راهکار محورگیری جزئی باعث می‌شود که مقادیر m_{ik} کمتر از یک باشند.

مثال ۷.۲ دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} -۱۰^{-۴}x_۱ + x_۲ &= ۱, \\ x_۱ + x_۲ &= ۲, \end{aligned}$$

با جواب دقیق

$$x_۱ = \frac{۱}{۱/۰۰۰۱}, \quad x_۲ = \frac{۱/۰۰۰۲}{۱/۰۰۰۱},$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از حساب ممیز شناور سه رقمی، جهت بررسی اشکالات خطای گردکردن، GEM بدون محورگیری و با محورگیری را روی این دستگاه اجرا کنید [۳۳].

جواب. اولین درایه محوری $a_{۱۱} = -۱۰^{-۴}$ و ضرب‌گر متناظر با آن

$$m_{۲۱} = \frac{۱}{-۱۰^{-۴}} = -۱۰^{۴},$$

است. با افزودن $-m_{۲۱}$ برابر سطر اول به سطر دوم و با توجه به

$$fl(۱ + ۱۰^{۴}) = fl(۰/۱۰۰۰۱ \times ۱۰^{۵}) = ۰/۱۰۰ \times ۱۰^{۵} = ۱۰^{۴},$$

و

$$fl(۲ + ۱۰^{۴}) = fl(۰/۱۰۰۰۲ \times ۱۰^{۵}) = ۰/۱۰۰ \times ۱۰^{۵} = ۱۰^{۴},$$

داریم

$$\begin{aligned} -۱۰^{-۴}x_{۱} + x_{۲} &= ۱, \\ ۱۰^{۴}x_{۲} &= ۱۰^{۴}. \end{aligned}$$

با استفاده از جایگذاری پسرو داریم

$$x_{۲} = ۱, \quad x_{۱} = ۰.$$

با اینکه جواب محاسبه شده برای $x_{۲}$ به جواب دقیق $x_{۲}$ نزدیک است اما جواب محاسبه شده برای $x_{۱}$ اختلاف فاحشی با جواب دقیق $x_{۱}$ دارد که ناشی از خطای گردکردن در استفاده از حساب سه رقمی است.

حال با استفاده از روند محورگیری جزئی، ابتدا توجه داریم که

$$\max\{|a_{۱۱}|, |a_{۲۱}|\} = \max\{|-۱۰^{-۴}|, |۱|\} = ۱ = |a_{۲۱}|.$$

بنابراین، بایستی جای سطرهای اول و دوم دستگاه عوض شود. با این کار، دستگاه

$$\begin{aligned} x_{۱} + x_{۲} &= ۲, \\ -۱۰^{-۴}x_{۱} + x_{۲} &= ۱, \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. ضرب‌گر این دستگاه عبارت است از

$$m_{۲۱} = \frac{-۱۰^{-۴}}{۱} = -۱۰^{-۴},$$

مجدداً با افزودن $-m_{۲۱}$ برابر سطر اول به سطر دوم و با توجه به

$$fl(۱ + ۱۰^{-۴}) = fl(۰/۱۰۰۰۱ \times ۱۰^{۱}) = ۰/۱۰۰ \times ۱۰^{۱} = ۱,$$

و

$$fl(1+2\times 10^{-4}) = fl(0.10002\times 10^{1}) = 0.100\times 10^{1} = 1,$$

دستگاه به صورت

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2,\\ x_2 &= 1, \end{aligned}$$

تبدیل می‌شود. جواب‌های حاصل از جایگذاری پسرو مقادیر $x_1 = 1$ و $x_2 = 1$ هستند که خیلی نزدیک به مقادیر دقیق هستند. در واقع، در حساب سه رقمی جواب‌های محاسبه شده با جواب‌های دقیق دستگاه یکسان هستند.

■

۲.۵.۲ محورگیری جزئی مقیاس شده

اگرچه محورگیری جزئی برای بیشتر دستگاه‌های خطی کافی است، با وجود این، دستگاه‌هایی خطی وجود دارند که این محورگیری ناکارآمد است. به عنوان مثال، دستگاه خطی

$$\begin{aligned} -10x_1 + 10^5 x_2 &= 10^5,\\ x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned} \tag{12.2}$$

را در نظر بگیرید. این دستگاه با دستگاه ذکر شده در مثال ۷.۲ معادل است که در آن معادله اول دستگاه در 10^5 ضرب شده است. اگر این دستگاه با محورگیری جزئی حل شود (که در این صورت نیازی به تغییر سطرها نخواهیم داشت) همان اتفاقی که در مثال مذکور با حل بدون محورگیری رخ داد، اتفاق می‌افتد؛ در واقع، در حساب ممیز شناور سه رقمی داریم

$$m_{21} = \frac{1}{-10} = -0.1,$$

$$a_{22}^{(1)} = fl(1+0.1\times 10^5) = fl(0.10001\times 10^5) = 0.100\times 10^5 = 10^4,$$

$$b_2^{(1)} = fl(2+0.1\times 10^5) = fl(0.10002\times 10^5) = 0.100\times 10^5 = 10^4.$$

در نتیجه، دستگاه

$$\begin{aligned} -10x_1 + 10^5 x_2 &= 10^5,\\ 10^4 x_2 &= 10^4, \end{aligned}$$

حاصل می‌شود که با جایگذاری پسرو، خواهیم داشت

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 0.$$

ملاحظه می‌شود که خطای بزرگ در جواب اتفاق می‌افتد.

برای رفع این مشکل، راهکار معروف به *"محورگیری جزئی مقیاس شده"* برای این دستگاه نیاز است: اولین گام در این روند، تعریف عامل مقیاس s_i برای هر سطر به صورت

$$s_i = \max_{1\le j\le n} \left|a_{ij}\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

است. واضح است که $s_i \neq 0$. برای صفر کردن عناصر ستون اول، سطر rام (سطر محوری)، با انتخاب عدد صحیح r به صورت

$$\frac{\left|a_{r1}\right|}{s_r} = \max_{1\le i\le n} \frac{\left|a_{i1}\right|}{s_i},$$

معرفی می‌شود. پس از تعیین سطر محوری، سطر اول با سطر rام تعویض شده، سپس مشابه قبل، متغیر x_1 از سطرهای دوم تا nام حذف می‌شود.

به طور مشابه، برای حذف مجهول x_k، عدد صحیح $r \geq k$ طوری تعیین می‌شود که

$$\frac{\left|a_{rk}^{(k-1)}\right|}{s_r} = \max_{k\le i\le n} \frac{\left|a_{ik}^{(k-1)}\right|}{s_i}, \quad (a_{ij}^{(0)} = a_{ij}).$$

در صورتی‌که $r \neq k$، سطرهای kام و rام تعویض شده و سپس، متغیر x_k در سطرهای $(k+1)$ام تا nام حذف می‌شود. لازم به ذکر است عامل‌های مقیاس s_1، s_2، $\ldots$، s_n در شروع روند فقط یکبار محاسبه شده و بایستی هنگام جابجایی سطرها، تعویض شوند.

مثال ۸.۲ دستگاه خطی (۱۲.۲) را با GEM با محورگیری جزئی مقیاس شده و با استفاده از حساب ممیز شناور چهار رقمی، حل کنید.

جواب. عامل مقیاس سطرهای دستگاه (۱۲.۲) عبارتند از

$$s_1 = \max\{|-10|, |10^5|\} = 10^5,$$
$$s_2 = \max\{|1|, |1|\} = 1.$$

در نتیجه

$$\frac{\left|a_{11}\right|}{s_1} = \frac{10}{10^5} = 10^{-4}, \quad \frac{\left|a_{21}\right|}{s_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

لذا بایستی جای سطر اول و دوم دستگاه عوض شود. بنابراین

$$x_1 + x_2 = 2,$$
$$-10x_1 + 10^5 x_2 = 10^5,$$

که با حل آن، نتایج همانند مثال قبل خواهند بود. در واقع، مقادیر دقیق در حساب سه رقمی، یعنی، $x_1 = 1$ و $x_2 = 1$ به‌دست می‌آیند. ■

محاسبات اضافی مورد نیاز در GEM با راهکار محورگیری جزئی مقیاس شده

برای حل دستگاه $Ax = b$ با GEM با محورگیری جزئی مقیاس شده، علاوه بر اعمال حسابی انجام یافته در نسخه ساده GEM، محاسبات اضافی دیگری صورت می‌گیرد که تعداد این محاسبات به قرار زیر است:

- اولین محاسبات اضافی مورد نیاز، مربوط به مشخص کردن عامل‌های مقیاس است، که با $n-1$ مقایسه برای هر سطر مشخص می‌شوند. بنابراین با $n(n-1)$ مقایسه عامل‌های مقیاس مشخص می‌شوند.

- محاسبات اضافی مورد نیاز بعدی، مربوط به انتخاب سطر محوری است. برای مشخص شدن اولین سطر محوری، به n تقسیم همراه با $n-1$ مقایسه نیاز است. با توجه به اینکه عامل‌های مقیاس فقط یکبار محاسبه می‌شوند، به‌طور مشابه، برای انتخاب دومین سطر محوری نیاز به $n-1$ تقسیم و $n-2$ مقایسه می‌باشد. با ادامه این روند، برای انتخاب $(n-1)$امین سطر محوری به ۲ تقسیم و ۱ مقایسه نیاز است.

در نتیجه، کل محاسبات اضافی مورد نیاز GEM با محورگیری جزئی مقیاس شده نسبت به نسخه ساده آن عبارت است از:

$$\text{تعداد مقایسه‌ها} = n(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{3}{2}n(n-1); \qquad (13.2)$$
$$\text{تعداد تقسیم‌ها} = \sum_{k=2}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n+2).$$

با توجه به اینکه در GEM تعداد کل محاسبات $\mathcal{O}(2n^3/3)$ است، نتیجه می‌شود که برای مقادیر بزرگ n، GEM با محورگیری جزئی مقیاس شده در مقایسه با نسخه ساده‌اش به زمان محاسباتی اضافی قابل

ملاحظه‌ای نیاز ندارد. ولی اگر راهکار به گونه‌ای تغییر یابد که در هر مرحله، برای انتخاب سطر محوری، عامل‌های مقیاس جدید را محاسبه کنیم، در این صورت جمله $n(n-۱)$ در (۱۳.۲) باید با

$$\sum_{k=۲}^{n} k(k-۱) = \frac{۱}{۳} n(n^{۲}-۱),$$

جایگزین شود. با این روش، محاسبات اضافی مورد نیاز $\mathcal{O}(n^{۳}/۳)$ خواهد بود که هم مرتبه با تعداد کل محاسبات نسخه ساده GEM است و لذا روش مورد نظر، روش مناسبی نمی‌تواند باشد.

۳.۵.۲ محورگیری کامل

با یک مثال نشان می‌دهیم که ممکن است درایه‌های ماتریس‌هایی که پس از هر مرحله اجرای GEM توأم با محورگیری جزئی یا محورگیری جزئی مقیاس شده، به‌دست می‌آیند، آن‌قدر بزرگ شوند که نتوان آن‌ها را در حافظه کامپیوتر ذخیره کرد.

در این مثال که از *ویلکینسون* است، ماتریس ضرایب دستگاه ۵×۵ به صورت

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad (۱۴.۲)$$

است. برای اجرای GEM، با راهکار محورگیری جزئی یا محورگیری جزئی مقیاس شده، این ماتریس نیازی به محورگیری ندارد [۴۱]. پس از مرحله اول GEM، خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}.$$

پس از مرحله دوم و با توجه به اینکه قبل از این مرحله نیز نیازی به محورگیری نیست، خواهیم داشت

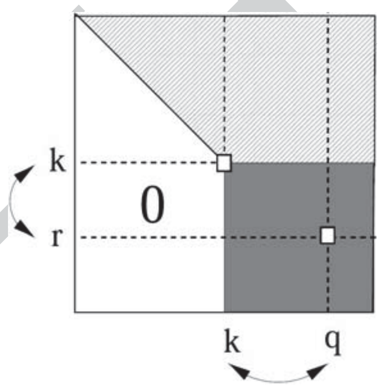
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۴ \end{bmatrix},$$

و به همین ترتیب پس از مرحله چهارم، نتیجه می‌شود

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}.$$

ملاحظه می‌شود که درایه‌های ستون آخر ماتریس ضرایب به صورت $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، ...، $۲^{۴}$ هستند. حال، دستگاهی را در نظر بگیرید که ماتریس ضرایب آن، ماتریسی به صورت (۱۴.۲) اما با ابعاد ۵۰۰×۵۰۰ باشد. در پایان اجرای GEM، ستون آخر ماتریس حاصل شامل اعدادی به صورت $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، ...، $۲^{۴۹۹}$ خواهد بود که مقدار آن‌ها در بیشتر کامپیوترهای در دسترس قابل ذخیره نیستند. برای رفع این مشکل از "*محورگیری کامل*" استفاده می‌شود.

در محورگیری کامل، برای انتخاب درایه محوری، همه $(n-k+۱)^{۲}$ درایه زیرماتریسی آزمایش می‌شوند که در پایین و سمت راست قرار دارند و شامل درایه قطری $a_{kk}^{(k-۱)}$ می‌باشند (شکل ۲.۲ را ببینید).



شکل ۲.۲: ناحیه تیره پُررنگ، نشان دهنده درایه‌هایی است که در جستجوی درایه محوری شامل می‌شوند.

در واقع، قبل از مرحله اول GEM، فرض می‌شود

$$|a_{rq}| = \max_{۱\le i,j\le n} |a_{ij}|.$$

سپس، روند طوری انجام می‌شود که a_{rq} در محل $a_{۱۱}$ قرار گیرد. برای این منظور ابتدا سطر rام را با سطر اول تعویض می‌کنیم، بعد ستون q را با ستون اول تعویض می‌کنیم. اما، برای این که جواب دستگاه تغییر نکند، بایستی جای x_q و $x_۱$ را نیز در بردار مجهولات عوض کنیم. به این ترتیب بزرگ‌ترین درایه

ماتریس ضرایب از نظر قدر مطلق درایه محوری می‌شود. سپس مرحله اول GEM را انجام می‌دهیم. قبل از انجام مرحله دوم GEM، فرض کنید

$$|a_{ps}^{(1)}| = \max_{2\leq i,j\leq n} |a_{ij}^{(1)}|.$$

مجدداً با تعویض سطرهای pام و دوم و نیز ستون‌های sام و دوم درایه محوری را $a_{ps}^{(1)}$ قرار می‌دهیم. توجه شود که همزمان بایستی جای x_s و x_2 را در بردار مجهولات عوض کنیم. این روند تکرار می‌شود تا روند GEM پایان یابد.

نکته ۹.۲ محاسبات اضافی مورد نیاز در GEM با محورگیری کامل نسبت به نسخه ساده GEM، مربوط به تعداد مقایسه‌ها است که برای انتخاب سطر محوری مناسب انجام می‌گیرد. برای انتخاب اولین سطر محوری، نیاز به $n^2 - 1$ مقایسه است. همچنین برای انتخاب دومین سطر محوری، $(n-1)^2 - 1$ مقایسه نیاز است. با ادامه روند، برای انتخاب $(n-1)$امین سطر محوری تعداد ۳ مقایسه نیاز است. بنابراین تعداد محاسبات اضافی مورد نیاز در این روش، برابر

$$\sum_{k=2}^{n}(k^2-1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6},$$

مقایسه است که هم مرتبه با تعداد کل محاسبات نسخه ساده GEM است. در نتیجه، راهکار محورگیری کامل، تنها برای دستگاه‌هایی توصیه می‌شود که دقت بالای محاسبات ضروری است و زمان اجرای محاسبات مورد نیاز برای این روش را می‌توان با دقت به‌دست آمده توجیه کرد.

نکته ۱۰.۲ با استفاده از مفهوم محورگیری کامل، محورگیری کامل مقیاس شده را نیز می‌توان مشابه محورگیری جزئی مقیاس شده، تعریف کرد.

۶.۲ تجزیه LU

همان‌طور که ملاحظه شد، GEM برای به‌دست آوردن جواب یک دستگاه معادلات خطی ناتکین، به $\mathcal{O}(n^3)$ عمل حسابی نیاز دارد. همچنین، برای حل یک دستگاه بالا (پایین) مثلثی با استفاده از الگوریتم جایگذاری پسرو (پیشرو) به $\mathcal{O}(n^2)$ عمل حسابی نیاز است.

حال اگر ماتریس ضرایب A به صورت مثلثی $A = LU$ تجزیه شده باشد، که در آن L و U به‌ترتیب ماتریس‌های پایین مثلثی و بالا مثلثی هستند، می‌توان بردار مجهولات x را به عنوان جواب دستگاه خطی $Ax = b$ در دو مرحله به‌دست آورد:

ابتدا فرض کنید $y =: Ux$، در این صورت دستگاه $Ax = LUx = b$ به صورت $Ly = b$ تبدیل می‌شود. اینک در گام اول، دستگاه پایین مثلثی $Ly = b$ را با استفاده از الگوریتم جایگذاری پیشرو حل

می‌کنیم که نیاز به $\mathcal{O}(n^2)$ عمل دارد. با به‌دست آوردن y در این مرحله، در گام دوم، دستگاه بالا مثلثی $Ux = y$ را حل می‌کنیم، که این هم با الگوریتم جایگذاری پسرو به $\mathcal{O}(n^2)$ عمل نیاز خواهد داشت. بنابراین در کل برای حل دستگاه خطی $Ax = b$ که در آن A به صورت $A = LU$ تجزیه شده باشد، به $\mathcal{O}(n^2)$ عمل نیاز داریم. این در حالی است که برای حل همین دستگاه خطی با GEM به $\mathcal{O}(n^3)$ عمل نیاز داریم. در دستگاه‌های بزرگ‌تر از ۱۰۰ × ۱۰۰، این اتفاق می‌تواند محاسبات را تا بیشتر از ۹۹% کاهش دهد، در واقع،

$$100^2 = 10,000 = (0/01)(1,000,000) = (0/01)(100)^3.$$

کاهش عملیات تا این اندازه، خیلی هم حیرت آور نیست. چون به‌دست آوردن ماتریس‌های L و U به‌طوری که $A = LU$ باشد، خود نیاز به $\mathcal{O}(n^3)$ عمل حسابی دارد. ولی مفید بودن این تجزیه زمانی به چشم می‌خورد که بخواهیم دستگاه $Ax = b$ را در زمان‌های متفاوت با بردارهای متفاوت b حل کنیم، که در این صورت با توجه به این که تجزیه A فقط یکبار انجام می‌شود، حجم محاسبات بسیار پایین خواهد آمد. در واقع، بعد از یکبار تجزیه و حل با یکی از این بردارهای b، در حل با بردارهای دیگر b، عملیات از $\mathcal{O}(n^3)$ به $\mathcal{O}(n^2)$ کاهش می‌یابد.

۱.۶.۲ به‌دست آوردن تجزیه LU

فرض کنید ماتریس‌های L و U به‌ترتیب پایین مثلثی و بالا مثلثی باشند و $A = LU$، یعنی

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (۱۵.۲)$$

در تجزیه $A = LU$، ابتدا ستون اول ماتریس L و سطر اول ماتریس U را تولید می‌کنیم:

$$l_{11}u_{11} = a_{11}, \qquad (۱۶.۲)$$

و برای $j = 2, 3, \ldots, n$، بایستی داشته باشیم

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}, \qquad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}. \qquad (۱۷.۲)$$

اینک ستون‌های دوم تا $(n-1)$ام ماتریس L و سطرهای دوم تا $(n-1)$ام ماتریس U را تولید می‌کنیم: بنا به (۱۵.۲)، داریم

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{ki} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{ki} = l_{ii}u_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}.$$

بنابراین برای $i = ۲, ۳, \ldots, n-۱$، داریم

$$l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=۱}^{i-۱} l_{ik}u_{ki}, \tag{۱۸.۲}$$

و برای $j = i+۱, i+۲, \ldots, n$ از معادلات

$$a_{ji} = \sum_{k=۱}^{i} l_{jk}u_{ki}\,, \qquad a_{ij} = \sum_{k=۱}^{i} l_{ik}u_{kj},$$

خواهیم داشت

$$l_{ji} = \frac{۱}{u_{ii}}\Big(a_{ji} - \sum_{k=۱}^{i-۱} l_{jk}u_{ki}\Big)\,, \qquad u_{ij} = \frac{۱}{l_{ii}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=۱}^{i-۱} l_{ik}u_{kj}\Big), \tag{۱۹.۲}$$

و در نهایت برای l_{nn} و u_{nn} داریم

$$l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=۱}^{n-۱} l_{nk}u_{kn}. \tag{۲۰.۲}$$

نکته ۱۱.۲ اگر $l_{ii} \neq ۰$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، آن‌گاه از (۱۶.۲)، (۱۸.۲)، (۲۰.۲) و معادلات دوم (۱۷.۲) و (۱۹.۲) درایه‌های مربوط به ماتریس U محاسبه خواهد شد. همچنین معادلات اول (۱۷.۲) و (۱۹.۲) درایه‌های ماتریس L را نتیجه می‌دهند.
به‌طور مشابه، اگر $u_{ii} \neq ۰$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، در این صورت از (۱۶.۲)، (۱۸.۲)، (۲۰.۲) و معادلات اول (۱۷.۲) و (۱۹.۲) درایه‌های مربوط به ماتریس L محاسبه خواهد شد. همچنین معادلات دوم (۱۷.۲) و (۱۹.۲) درایه‌های ماتریس U را نتیجه می‌دهند.

نکته ۱۲.۲ الگوریتم مبتنی بر معادلات (۱۶.۲)-(۲۰.۲) که در آن ماتریس L، یک ماتریس پایین مثلثی واحد باشد، یعنی $l_{ii} = ۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، به *"تجزیه دولیتل"*[۶] معروف است. همچنین در این الگوریتم، اگر ماتریس U، یک ماتریس بالا مثلثی واحد باشد، یعنی $u_{ii} = ۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، تجزیه مورد نظر، *"تجزیه کروت"*[۷] نامیده می‌شود.

[۶] Doolittle factorization
[۷] Crout factorization

نکته ۱۳.۲ برای حل $LUx=b$، ابتدا با استفاده از جایگذاری پیشرو، دستگاه $Ly=b$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{l_{11}},\\ y_k &= \frac{1}{l_{kk}}\Big(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}y_j\Big), \quad k=2,3,\dots,n. \end{aligned}$$

سپس دستگاه $Ux=y$ را با استفاده از جایگذاری پسرو حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{u_{nn}},\\ x_k &= \frac{1}{u_{nn}}\Big(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j\Big), \quad k=n-1,n-2,\dots,1. \end{aligned}$$

مثال ۱۴.۲ تجزیه‌های دولیتل و کروت را برای ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 60 & 30 & 20\\ 30 & 20 & 15\\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix},$$

بیابید.

جواب. با توجه به نکته‌های ۱۱.۲ و ۱۲.۲، درایه‌های ماتریس‌های L و U در تجزیه دولیتل ماتریس A عبارتند از

$$l_{11}u_{11}=60 \overset{l_{11}=1}{\Longrightarrow} u_{11}=60,$$

- درایه‌های ستون اول L و سطر اول U

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{2}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{1}{3},\\ u_{12} &= \frac{a_{12}}{l_{11}} = 30, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 20, \end{aligned}$$

- درایه‌های ستون دوم L و سطر دوم U

$$\begin{aligned} l_{22}u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} \overset{l_{22}=1}{\Longrightarrow} u_{22}=5,\\ l_{32} &= (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = 1,\\ u_{23} &= (a_{23} - l_{21}u_{13})/l_{22} = 5, \end{aligned}$$

- درایه‌های ستون سوم L و سطر سوم U

$$l_{33}u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \overset{l_{33}=1}{\Longrightarrow} u_{33} = \frac{1}{3}.$$

لذا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

درایه‌های ماتریس‌های L و U در تجزیه کروت ماتریس A را می‌توان به‌جای محاسبه مستقیم از تجزیه دولیتل به‌دست آورد. بدین منظور، با قرار دادن عناصر قطری U در یک ماتریس قطری مانند D داریم

$$\begin{aligned} A = LD\widetilde{U} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 30 & 5 & 0 \\ 20 & 5 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \widetilde{L}\widetilde{U}. \end{aligned}$$

■

تعریف ۱۵.۲ زیرماتریس اصلی پیشروی مرتبه k، $k = 1, 2, \dots, n$، از ماتریس $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ با A_k نشان داده شده و به صورت

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۱۶.۲ *فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ماتریس A دارای تجزیه‌ای یکتا به صورت*

$$A = LU,$$

با ماتریس L پایین مثلثی واحد و ماتریس U بالا مثلثی، است اگر و تنها اگر زیرماتریس‌های اصلی پیشروی A_i از ماتریس A برای $i = 1, 2, \dots, n-1$ ناتکین باشند.

برهان. اثبات کفایت: فرض کنید زیرماتریس‌های اصلی پیشروی A_i از ماتریس A برای $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$ ناتکین باشند. به کمک استقرا روی i، ثابت می‌کنیم تجزیه‌ای یکتا به صورت $A = LU$ با $l_{kk} = ۱$ برای A وجود دارد.

به وضوح حکم به ازای $i = ۱$ برقرار است. فرض کنید (فرض استقرا) تجزیه‌ای یکتا برای $A_{i-۱}$ به صورت $A_{i-۱} = L^{(i-۱)}U^{(i-۱)}$ با $l_{kk}^{(i-۱)} = ۱$، $k = ۱, ۲, \ldots, i-۱$، وجود داشته باشد. نشان می‌دهیم تجزیه‌ای یکتا برای A_i وجود دارد.

ماتریس A_i را با ماتریس‌های بلوکی به صورت

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i-۱} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d}^T & a_{ii} \end{bmatrix},$$

افراز می‌کنیم و وجود و یکتایی تجزیه‌ای را به صورت

$$A_i = L^{(i)}U^{(i)} = \begin{bmatrix} L^{(i-۱)} & ۰ \\ \mathbf{l}^T & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(i-۱)} & \mathbf{u} \\ ۰ & u_{ii} \end{bmatrix}, \tag{۲۱.۲}$$

برای آن جستجو می‌کنیم. با محاسبه ضرب ماتریسی سمت راست (۲۱.۲) و برابر قرار دادن بلوک‌های متناظر با سمت چپ این معادله، نتیجه می‌شود که بردارهای $\mathbf{l}$ و $\mathbf{u}$ جواب دستگاه‌های خطی $L^{(i-۱)}\mathbf{u} = \mathbf{c}$ و $\mathbf{l}^T U^{(i-۱)} = \mathbf{d}^T$ هستند. از طرف دیگر، با توجه به اینکه

$$۰ \neq \det(A_{i-۱}) = \det(L^{(i-۱)}) \det(U^{(i-۱)}),$$

نتیجه می‌شود ماتریس‌های $L^{(i-۱)}$ و $U^{(i-۱)}$ ناتکین هستند و لذا بردارهای $\mathbf{l}$ و $\mathbf{u}$ به صورت یکتا به‌دست می‌آیند. بنابراین تجزیه یکتایی برای A_i، که u_{ii} جواب یکتای معادله $u_{ii} = a_{ii} - \mathbf{l}^T\mathbf{u}$ است، وجود دارد و این اثبات کفایت را کامل می‌کند.

اثبات لزوم: فرض کنید تجزیه یکتایی برای ماتریس A به صورت $A = LU$ با $l_{kk} = ۱$، $k = ۱, ۲, \ldots, n$، وجود داشته باشد. ثابت می‌کنیم $n - ۱$ زیرماتریس اصلی پیشروی اول A ناتکین هستند. حالت‌هایی را که ماتریس A ناتکین و تکین باشد، جداگانه بررسی می‌کنیم.

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که ماتریس A ناتکین باشد. از اینکه تجزیه‌ای یکتا برای A وجود دارد، بنا به (۲۱.۲)، می‌توان نوشت

$$A_i = L^{(i)}U^{(i)}, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

بنابراین

$$\det(A_i) = \det(L^{(i)}) \det(U^{(i)}) = \det(U^{(i)}) = u_{۱۱}u_{۲۲}\ldots u_{ii}, \tag{۲۲.۲}$$

که به ازای $i=n$ و ناتکین بودن A، داریم $u_{11}u_{22}\dots u_{nn}\neq 0$، و در نتیجه

$$\det(A_i)=u_{11}u_{22}\dots u_{ii}\neq 0, \quad i=1,2,\dots,n-1,$$

یعنی $n-1$ زیرماتریس اصلی پیشروی اول ماتریس A ناتکین هستند.
اینک حالتی را در نظر می‌گیریم که ماتریس A تکین باشد. در این صورت، حداقل یک درایه قطری ماتریس U صفر است. فرض کنید k کوچک‌ترین اندیسی باشد که $u_{kk}=0$. بنا به (۲۱.۲)، تجزیه تا $(k-1)$اُمین گام بدون مشکل می‌تواند محاسبه و انجام شود. ولی از این مرحله به بعد، چون $U^{(k)}$ تکین است، وجود و یکتایی بردار **l** از بین می‌رود؛ و همین نتیجه برای تجزیه برقرار است، که متناقض با فرض است. بنابراین، برای اینکه قبل از اتمام کل روند تجزیه، چنین اتفاقی برای ماتریس A رُخ ندهد، بایستی همه مؤلفه‌های u_{kk} تا مرحله $k=n-1$ غیر صفر باشند. در نتیجه بنا به (۲۲.۲)، همه زیرماتریس‌های اصلی پیشروی A_k، $k=1,2,\dots,n-1$، باید ناتکین باشند. ■

مثال ۱۷.۲ ماتریس‌های

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید [۳۶]. چون ماتریس تکین A دارای زیرماتریس اصلی پیشروی ناتکین $A_1=1$ است، بنا به قضیه ۱۶.۲، ماتریس A دارای تجزیه یکتای LU با $l_{kk}=1$ است. در حالی که شرایط قضیه ۱۶.۲، برای ماتریس‌های B و C برقرار نیست. بنابراین ممکن است تجزیه LU وجود نداشته و یا یکتا نباشد. در واقع، ماتریس ناتکین B، با B_1 تکین، تجزیه LU ندارد. در حالی که ماتریس تکین C، با C_1 تکین، تعداد نامتناهی تجزیه به صورت $C=L_\beta U_\beta$ دارد، که در آن

$$L_\beta=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ \beta & 1\end{bmatrix},\quad U_\beta=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 2-\beta\end{bmatrix},\quad \forall\beta\in\mathbb{R}.$$

■

۲.۶.۲ GEM به عنوان یک تجزیه

فرض کنید GEM بدون محورگیری قابل اجرا روی ماتریس $A_{n\times n}$ باشد. با تعریف ضرب‌گرهای

$$m_{i1}=\frac{a_{i1}}{a_{11}},\quad i=2,3,\dots,n,$$

گام اول GEM را اجرا می‌کنیم، یعنی، $-m_{i1}$ برابر سطر اول را به سطر iام، $i = 2, 3, \ldots, n$، اضافه می‌کنیم:

$$A \longrightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

با تعریف ماتریس M_1 به صورت

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \ddots & & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

به سادگی ملاحظه می‌شود

$$A^{(1)} = M_1 A.$$

با اجرای گام دوم GEM، یعنی، اضافه کردن $-m_{i2}$ برابر سطر دوم $A^{(1)}$ به سطر iام، $i = 3, 4, \ldots, n$، که

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i = 3, 4, \ldots, n,$$

خواهیم داشت:

$$A \longrightarrow A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

در این صورت، به وضوح ملاحظه می‌شود

$$A^{(2)} = M_2 A^{(1)} = M_2 M_1 A,$$

که در آن

$$M_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ∘ & ∘ & \cdots & ∘ \\ ∘ & ۱ & \ddots & & ∘ \\ ∘ & -m_{۳۲} & ۱ & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ∘ \\ ∘ & -m_{n۲} & ∘ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}.$$

با ادامه این روند، پس از ۱ $- n$ مرحله، خواهیم داشت

$$A \longrightarrow A^{(۱)} \longrightarrow A^{(۲)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{(n-۱)},$$

که در آن $A^{(n-۱)}$ بالا مثلثی است و

$$A^{(n-۱)} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ∘ & a_{۲۲}^{(۱)} & a_{۲۳}^{(۱)} & \cdots & a_{۲n}^{(۱)} \\ ∘ & ∘ & a_{۳۳}^{(۲)} & \cdots & a_{۳n}^{(۲)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ∘ & ∘ & ∘ & \cdots & a_{nn}^{(n-۱)} \end{bmatrix}.$$

همچنین می‌توان نوشت

$$A^{(n-۱)} = M_{n-۱}A^{(n-۲)},$$

که در آن

$$M_{n-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ∘ & \cdots & \cdots & ∘ \\ ∘ & ۱ & \ddots & & ∘ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ ∘ & ∘ & \cdots & ۱ & ∘ \\ ∘ & ∘ & \cdots & -m_{n,n-۱} & ۱ \end{bmatrix}.$$

با قرار دادن $U := A^{(n-۱)}$، ماتریس U بالا مثلثی است و

$$\begin{aligned} U &= A^{(n-۱)} = M_{n-۱}A^{(n-۲)} \\ &= M_{n-۱}M_{n-۱}\cdots M_۱A. \end{aligned} \qquad (۲۳.۲)$$

ماتریس‌های پایین مثلثی $M_۱$، $M_۲$، $\cdots$، $M_{n-۱}$ ناتکین هستند و بنا به (۲۳.۲) داریم

$$A = M_۱^{-۱}M_۲^{-۱}\cdots M_{n-۱}^{-۱}U, \qquad (۲۴.۲)$$

که در آن

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \ldots, M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

با تعریف بردارهای

$$m_k = \left[0, \ldots, 0, m_{k+1,k}, \ldots, m_{n,k}\right]^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$e_k = [0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{k\text{ام}}, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n,$$

می‌توان نوشت

$$M_k = I_n - m_k e_k^T; \qquad M_k^{-1} = I_n + m_k e_k^T,$$

که $(m_i e_i^T)(m_j e_j^T)$ برای $i \neq j$، ماتریس صفر است. بنابراین

$$\begin{aligned} M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} &= \left(I_n + m_1 e_1^T\right)\left(I_n + m_2 e_2^T\right) \cdots \left(I_n + m_{n-1} e_{n-1}^T\right) \\ &= I_n + \sum_{i=1}^{n-1} m_i e_i^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{۲۵.۲}$$

حال با قرار دادن

$$L := M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1},$$

بنا به (۲۵.۲)، ماتریس L پایین مثلثی واحد بوده و با توجه به (۲۴.۲)، داریم

$$A = LU.$$

بنابراین با اعمال GEM روی ماتریس A، تجزیه LU آن را نیز می‌توان به‌دست آورد.

نتیجه ۱۸.۲ *با توجه به بحث انجام شده، اگر در محاسبه ضرب‌گرها با GEM، تقسیم بر صفر به‌وجود آید، الگوریتم تجزیه LU با شکست مواجه می‌شود. در واقع، در حالتی که GEM بدون تعویض سطرها قابل اجرا نباشد، ماتریس مورد نظر تجزیه LU ندارد.*
نتیجه دیگری که از این بحث و قضیه ۱۶.۲ می‌توان گرفت، این است که اگر همه زیرماتریس‌های اصلی پیشروی ماتریس A ناتکین باشند، GEM بدون تعویض سطرها قابل اجراست.

مثال ۱۹.۲ تجزیه LU نظیر ماتریس هیلبرت مرتبه سه

$$H = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix},$$

را با استفاده از GEM بیابید.

جواب. با محاسبه ضرب‌گرهای $m_{i۱}$ داریم

$$M_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -m_{۲۱} & ۱ & ۰ \\ -m_{۳۱} & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۲} & ۱ & ۰ \\ -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین

$$H^{(۱)} = M_۱ H = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۱۲} & \frac{۱}{۱۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۱۲} & \frac{۴}{۴۵} \end{bmatrix}.$$

به‌طور مشابه برای انجام گام دوم GEM، ماتریس $H^{(۱)}$ باید در ماتریس

$$M_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -m_{۳۲} & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix},$$

ضرب شود. بنابراین ماتریس‌های U و L در تجزیه ماتریس H به صورت

$$U = H^{(۲)} = M_۲ M_۱ H = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۱۲} & \frac{۱}{۱۲} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۱۸۰} \end{bmatrix},$$

و

$$L = M_۱^{-۱} M_۲^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۱ \end{bmatrix},$$

به‌دست می‌آیند. ■

۳.۶.۲ ماتریس جایگشت

در بخش قبل، حل دستگاه $Ax = b$ با استفاده از تجزیه LU تشریح شد. این راهکار زمانی مفید است که اجرای GEM بدون تعویض سطرها برای ماتریس A قابل اجرا باشد و نیازی به تعویض سطرها برای جلوگیری از ظاهر شدن تقسیم بر صفر یا کنترل خطای گردکردن در استفاده از حساب ممیز شناور متناهی-رقم نداشته باشیم. در این قسمت، روش ارائه شده به حالتی که تعویض سطرها نیاز است، تعمیم داده می‌شود.

تعریف ۲۰.۲ فرض کنید $(k_۱, k_۲, \ldots, k_n)$ جایگشتی دلخواه از اعداد $(۱, ۲, \ldots, n)$ باشد. ماتریس جایگشت[۸] از مرتبه n متناظر با این جایگشت به صورت $P = (p_{ij})$ تعریف می‌شود، که در آن

$$p_{ij} = \delta_{k_i j} = \begin{cases} ۱, & \text{if } j = k_i, \\ ۰, & \text{if } j \neq k_i. \end{cases} \tag{۲۶.۲}$$

مثال ۲۱.۲ ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

یک ماتریس جایگشت است. فرض کنید ماتریس A با ابعاد ۳×۳ باشد. در این صورت، حاصل ضرب PA ماتریسی است که از تعویض سطرهای دوم و سوم ماتریس A به‌دست می‌آید:

$$PA = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}.$$

در حالت کلی، اگر ماتریس $A = (a_{ij})$ با ابعاد $n \times n$ باشد و عناصر ماتریس جایگشت P با (۲۶.۲) تعریف شوند، ماتریس PA به صورت

$$PA = \begin{bmatrix} a_{k_۱,۱} & a_{k_۱,۲} & \cdots & a_{k_۱,۳} \\ a_{k_۲,۱} & a_{k_۲,۲} & \cdots & a_{k_۲,۳} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_n,۱} & a_{k_n,۲} & \cdots & a_{k_n,۳} \end{bmatrix},$$

خواهد بود. ■

[۸] Permutation matrix

نکته ۲۲.۲ یک ماتریس جایگشت، ماتریسی ناتکین و متعامد است، یعنی،

$$P^{-1} = P^T.$$

در واقع،

$$\left(PP^T\right)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} p_{is}p_{js} = \sum_{s=1}^{n} \delta_{k_is}\delta_{k_js} = 1 \times \delta_{k_jk_i} = \delta_{ij},$$

و به‌طور مشابه، $\left(P^TP\right)_{ij} = \delta_{ij}$.

فرض کنید برای حل دستگاه $Ax = b$ مجبور به تعویض سطرها باشیم. این بدین معنی است که آرایش جدیدی از معادلات دستگاه وجود دارد که اجرای GEM بدون تعویض سطرها ممکن باشد، یعنی، ماتریس جایگشتی مانند P وجود دارد به‌طوری‌که GEM برای دستگاه $PAx = Pb$ بدون تعویض سطرها قابل اجرا است. در این حالت، ابتدا تجزیه LU را برای ماتریس PA به‌دست آورده و سپس دستگاه را با بردار سمت راست Pb که حاصل از بردار b با تعویض سطرهای متناظر با سطرهای تعویضی A است، حل می‌کنیم.

توجه دارید که چون $P^{-1} = P^T$، داریم

$$A = P^{-1}LU = (P^TL)U,$$

که U همچنان بالا مثلثی است اما P^TL پایین مثلثی نیست مگر اینکه $P = I$، یعنی تعویض سطر انجام نشده باشد.

مثال ۲۳.۲ آیا ماتریس ناتکین

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

تجزیه LU دارد؟ اگر پاسخ منفی است، تجزیه LU را برای ماتریس PA بیابید که P ماتریسی جایگشت است.

جواب. چون در محاسبه ضرب‌گرهای m_{i1} با GEM، تقسیم بر صفر به‌وجود می‌آید ($a_{11} = 0$)، بنا به نتیجه ۱۸.۲، ماتریس A تجزیه LU ندارد. با این‌حال، با تعویض سطر اول و دوم، می‌توان روند GEM را شروع کرد. در واقع، با محاسبه ضرب‌گرها و اجرای گام به گام GEM خواهیم داشت

$$m_{21} = 0,\ m_{31} = -1,\ m_{41} = 1,$$

و

$$A \longrightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

همچنین

$$m_{32} = 0\,,\ m_{42} = 1\,,$$

و

$$A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

در این مرحله، چون درایه محوری برابر صفر است، نیاز به تعویض سطرهای سوم و چهارم داریم که در این صورت ماتریس $A^{(3)}$ به صورت

$$A^{(2)} \longrightarrow A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

حاصل می‌شود. چون ماتریس $A^{(3)}$ بالا مثلثی است، ماتریس U را در تجزیه ماتریس PA همان $A^{(3)}$ در نظر گرفته که ماتریس جایگشت P متناظر به صورت

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

است. بنابراین

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

و تجزیه LU ماتریس PA عبارت است از

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU.$$

با توجه به اینکه $P^{-۱} = P^T$، رابطه بالا نتیجه می‌دهد

$$A = P^T(LU) = (P^TL)U = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

■

[۹]Cholesky factorization

تعریف. ماتریس $n\times n$، A را غالب قطری اکید سطری گوییم هرگاه

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \,, \quad i=1,2,\dots,n$$

همچنین ماتریس $n\times n$، A غالب قطری اکید ستونی نامیده می‌شود هرگاه

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \,, \quad j=1,2,\dots,n$$

مثال. ماتریس‌های A، B را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 5 & -6\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 6 & 4 & -3\\ 4 & -2 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ماتریس نامتقارن A، غالب قطری اکید سطری است ولی ماتریس متقارن B، غالب قطری اکید سطری نیست. همچنین A^T غالب قطری سطری نیست و $B=B^T$ نیز چنین است.

قضیه. GEM بدون محورگیری، غالب قطری اکید سطری بودن یک ماتریس را حفظ می‌کند.

اثبات. کافی است اولین گام از GEM را در نظر بگیریم (مرحله‌ای که صفرها در ستون 1 ایجاد می‌شوند) زیرا گام‌های بعدی به جز اینکه بر روی ماتریس‌های کوچکتر به کار می‌روند از گام 1 تبعیت می‌کنند. بنابراین فرض کنید A ماتریس $n\times n$ و غالب قطری اکید سطری باشد. با در نظر داشتن صفرهای بوجود آمده در ستون اول و همچنین این حقیقت که سطر اول تغییر نمی‌کند، باید ثابت کنیم که به ازای $i=2,3,\dots,n$ داریم

$$|a_{ii}^{(1)}| > \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^{(1)}|$$

عبارت فوق برحسب عناصر A به صورت زیر است

$$\left|a_{ii}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}\right| > \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}\right|$$

کافی است نامساوی زیر را ثابت کنیم

$$|a_{ii}| - \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i}\right| > \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} \left(|a_{ij}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right| \right)$$

یا به طور معادل، کافی است ثابت کنیم

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| > \sum_{j=2}^{n} \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right| \qquad (1)$$

با توجه به غالب قطری اکید سطری بودن ماتریس A، داریم

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| .$$

در نتیجه

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| > |a_{i1}| \qquad (*)$$

از طرفی بنا به غالب قطری اکید بودن سطر اول داریم

$$|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

$$\xrightarrow[\text{و به } |a_{i1}| \text{ ضرب}]{\text{تقسیم بر } |a_{11}|} |a_{i1}| > \sum_{j=2}^{n} \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right| \qquad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$، حکم، یعنی (1) نتیجه می‌شود.

تبصره. اگر ماتریس A در $AX=b$ دارای خاصیت غالب قطری اکید سطری باشد، آن گاه در اولین گام GEM، می توان سطر اول را به عنوان سطر محوری انتخاب کرد زیرا عنصر محوری a_{11} بنا بر تعریف غالب قطری اکید سطری، صفر نیست. از طرفی با توجه به اینکه GEM خاصیت غالب قطری اکید سطری بودن را حفظ می کند، عنصر محوری $a_{22}^{(1)}$ نیز صفر نیست و...

قضیه. هر ماتریس غالب قطری اکید سطری نامنفرد است و یک تجزیه LU دارد.

اثبات. فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ و غالب قطری اکید سطری باشد. ابتدا نشان می دهیم A نامنفرد است. برای این منظور، دستگاه خطی همگن $AX=0$ را در نظر گرفته و نشان می دهیم دارای جواب یکتای بدیهی است.

(برهان خلف) فرض کنید یک جواب نا صفر برای این دستگاه وجود داشته باشد. در این صورت به ازای k ای،

$$0<|x_k|=\max_{1\le j\le n}|x_j|$$

با توجه به اینکه X جواب $AX=0$ است، می توان نوشت

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0\ ,\quad i=1,2,\dots,n$$

داریم

$$a_{kk}x_k=-\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_{kj}x_j$$

در نتیجه

$$|a_{kk}||x_k|\le\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}||x_j|$$

$$\Rightarrow |a_{kk}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}|\left|\frac{x_j}{x_k}\right|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq n}}^{n}|a_{kj}|$$

که در تناقض با غالب قطری اکید سطری بودن A است. بنابراین فرض خلف

باطل و $AX=0$ دارای جواب یکتای بدیهی است. لذا ماتریس A، نامنفرد است.

همچنین با توجه به اینکه GEM بر روی ماتریس A (با خاصیت غالب قطری اکید سطری) بدون محورگیری قابل اجرا است، بنابراین A یک تجزیه LU دارد.

توضیح. اگر GEM با محورگیری جزئی مقیاس شده، آرایه مقیاس را بعد از هر گام اصلی دوباره محاسبه کند و بر روی یک ماتریس غالب قطری سطری اکید اعمال شود آن گاه سطرهای محوری به ترتیب سطرهای $1, 2, \dots, n$ خواهند بود. از این رو، در این حالت، محورگیری را می‌توان حذف کرد.

اثبات. با توجه به اینکه GEM بدون محورگیری، غالب قطری اکید سطری بودن یک ماتریس را حفظ می‌کند، کافی است نشان دهیم که اندیس اولین سطر محوری که در الگوریتم انتخاب می‌شود برابر 1 است. بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$\frac{|a_{11}|}{s_1} > \frac{|a_{i1}|}{s_i}, \quad i=2,\dots,n \qquad (1)$$

با توجه به غالب قطری اکید سطری بودن A، به ازای هر i داریم

$$|a_{ii}| = \max_j |a_{ij}| = s_i \Rightarrow \frac{|a_{11}|}{s_1} = 1 \qquad (*)$$

و برای هر $i=2,\dots,n$ داریم

$$|a_{i1}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| = s_i \Rightarrow \frac{|a_{i1}|}{s_i} < 1 \qquad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$، (1) نتیجه می‌شود.

تعریف. ماتریس $n\times n$ حقیقی و متقارن A را اکیداً معین مثبت (معین مثبت اکید) گوییم هرگاه برای هر بردار ستونی n بعدی $X\neq 0$ داشته باشیم

$$X^TAX>0$$

$$X^TAX=[x_1,\dots,x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=[x_1\cdots x_n]\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

به عنوان مثال، ماتریس

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

معین مثبت اکید است زیرا

$$X^TAX=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\ -x_1+2x_2-x_3\\ -x_2+2x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+x_3^2=\alpha$$

با توجه به اینکه x_1، x_2 و x_3 همگی هم‌زمان صفر نیستند، $\alpha>0$ است. بنابراین A معین مثبت اکید است.

تعریف. اگر برای $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و متقارن داشته باشیم

$$\forall X\ (\neq 0),\quad X^T A X \geqslant 0$$

آن گاه. A را شبه معین مثبت می نامند.

مثال: فرض کنید A یک ماتریس معین مثبت اکید باشد. نشان دهید $\bar{A}^1$ نیز چنین است.

مثال. نشان دهید برای یک ماتریس معین مثبت اکید مانند $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ داریم

$$a_{ii} > 0,\quad i = 1, \dots, n$$

حل. فرض کنید A الزاماً معین مثبت است. بنابراین به ازای هر $x \neq 0$ ، داریم

$$x^T A x > 0 .$$

از جمله به ازای $x = e_i$ ، که در آن e_i بردار n بعدی با عناصر صفر غیر از عنصر iام که برابر یک است، به سادگی داریم

$$0 < x^T A x = x^T \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = a_{ii} \Longrightarrow \forall\ i=1,\dots,n: \quad a_{ii} > 0 .$$

تبصره. عکس مثال قبل برقرار نیست، یعنی شرط مثبت بودن عناصر قطری ماتریس یک شرط لازم برای معین مثبت اکید بودن A است ولی شرط کافی نیست. به عنوان مثال، ماتریس $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ دارای عناصر قطری مثبت است ولی معین مثبت اکید نیست زیرا برای $X\neq 0$، $X^TAX=(x_1+x_2)^2$، لذا کافی است $X=(\alpha,-\alpha)^T$، $\alpha\neq 0$ را در نظر بگیریم و نشان دهیم A معین مثبت اکید نیست.

قضیه. هر ماتریس معین مثبت اکید، نامنفرد است. علاوه بر این، GEM را می‌توان روی دستگاه خطی $AX=b$، به جهت یافتن جواب یکتای آن، بدون تعویض سطر و ستون اعمال کرد.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم A نامنفرد است.

(فرض خلف) فرض کنید $X\neq 0$ برداری باشد که در $AX=0$ صدق کند، در این صورت، خواهیم داشت $X^TAX=0$ که در تناقض با معین مثبت اکید بودن A است. پس فرض خلف باطل و A یک ماتریس نامنفرد است.

حال ثابت می‌کنیم GEM بدون تعویض سطر و ستون قابل اجرا است. فرض کنید A_k به ازای kای دلخواه که $1\leq k\leq n$، یک زیرماتریس اصلی پیشرو A باشد. اگر A_k معین مثبت نباشد آنگاه یک بردار ستونی k بعدی مانند $\tilde{X}\neq 0$ وجود دارد به طوری که $\tilde{X}^T A_k \tilde{X}\leq 0$. از $\tilde{X}$ یک بردار ستونی n بعدی مانند $X\neq 0$، با قرار دادن صفر در $(n-k)$ مولفه آخر می‌سازیم.

$$X=\begin{pmatrix}\tilde{X}\\0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}A_k & v\\ v^T & \alpha\end{pmatrix}$$

داریم

$$X^T A X = \begin{bmatrix} \tilde{x}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_k & v \\ v^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{x} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_k \tilde{x} \\ v^T \tilde{x} \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{x}^T A_k \tilde{x} \leq 0$$

که در تناقض با معین مثبت اکید بودن A است. بنابراین هر زیر ماتریس اصلی پیشرو A معین مثبت و بنابر قسمت اول ناتکین است و در نتیجه بنابر مطالب قبل، نتیجه می‌گیریم ۱-۲ تا GE بدون تعویض سطر روی دستگاه قابل اجرا است.

مثال ۲۷.۲ نشان دهید اگر $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & w^T \\ w & K \end{bmatrix}$، ماتریسی متقارن و اکیداً معین مثبت باشد آن‌گاه $a_{۱۱} > ۰$ و K نیز ماتریسی متقارن و اکیداً معین مثبت است.

جواب. با توجه به متقارن بودن ماتریس A داریم

$$A = A^T = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & w \\ w^T & K^T \end{bmatrix} \Rightarrow K = K^T.$$

فرض کنید $x = [x_۱ \ \ \bar{o}]^T$، که در آن $x_۱$ مقداری ناصفر و $\bar{o}$ بردار سطری صفر از بُعد مناسب باشد. در این صورت، داریم

$$۰ < x^T A x = [x_۱ \ \ \bar{o}] \begin{bmatrix} a_{۱۱} & w^T \\ w & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ \bar{o}^T \end{bmatrix} = a_{۱۱}(x_۱)^۲ \Rightarrow a_{۱۱} > ۰.$$

حال، فرض کنید $x = [۰ \ \ y]^T$، که در آن y بردار سطری دلخواه ناصفر است. لذا

$$۰ < x^T A x = [۰ \ \ y] \begin{bmatrix} a_{۱۱} & w^T \\ w & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ y^T \end{bmatrix} = y^T K y.$$

بنابراین، K یک ماتریس اکیداً معین مثبت است. ■

نکته ۲۸.۲ هر ماتریس اکیداً معین مثبت، ناتکین است. زیرا، اگر فرض کنیم $x \neq \bar{o}$ برداری باشد که در $Ax = \bar{o}$ صدق می‌کند، در این صورت خواهیم داشت $x^T Ax = ۰$، که در تناقض با اکیداً معین مثبت بودن A است. بنابراین

$$\nexists x \neq \bar{o}: \quad Ax = \bar{o},$$

یعنی، ماتریس A ناتکین است.

الگوریتم به‌دست آوردن تجزیه چولسکی در قالب قضیه‌ای که در ادامه می‌آید، بیان می‌شود.

***قضیه ۲۹.۲** فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ اکیداً معین مثبت باشد. آن‌گاه ماتریس بالا مثلثی یکتای H با عناصر قطری مثبت وجود دارد به‌طوری‌که*

$$A = H^T H,$$

که در آن عناصر h_{ij} از ماتریس H^T به صورت

$$h_{۱۱} = \sqrt{a_{۱۱}},$$

$$h_{ij} = \Big(a_{ij} - \sum_{k=۱}^{j-۱} h_{ik}h_{jk}\Big)\Big/h_{jj}, \quad i = ۲, ۳, \ldots, n;\ j = ۱, ۲, \ldots, i-۱, \quad (۲۸.۲)$$

$$h_{ii} = \Big(a_{ii} - \sum_{k=۱}^{i-۱} h_{ik}^{۲}\Big)^{\frac{۱}{۲}}, \qquad i = ۲, ۳, \ldots, n, \qquad (۲۹.۲)$$

محاسبه می‌شوند.

برهان. برای اثبات به مرجع [۳۶] رجوع شود. ■

مثال ۳۰.۲ تجزیه چولسکی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱۳ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۳ & ۹ \end{bmatrix},$$

را به‌دست آورید [۱۱].

جواب. با توجه به قضیه ۲۹.۲ داریم

$$h_{۱۱} = \sqrt{a_{۱۱}} = ۱,$$

- درایه‌های ستون اول ماتریس H^T عبارت هستند از

$$h_{21} = \frac{a_{21}}{h_{11}} = 2, \quad h_{31} = \frac{a_{31}}{h_{11}} = 1, \quad h_{41} = \frac{a_{41}}{h_{11}} = 2,$$

- درایه‌های ستون دوم ماتریس H^T عبارت هستند از

$$\begin{aligned} h_{22} &= \left(a_{22} - h_{21}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3, \\ h_{32} &= \left(a_{32} - h_{31}h_{21}\right)/h_{22} = 0, \\ h_{42} &= \left(a_{42} - h_{41}h_{21}\right)/h_{22} = 0, \end{aligned}$$

- درایه‌های ستون سوم ماتریس H^T عبارت هستند از

$$\begin{aligned} h_{33} &= \left(a_{33} - h_{31}^2 - h_{32}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \\ h_{43} &= \left(a_{43} - h_{41}h_{31} - h_{42}h_{32}\right)/h_{33} = 1, \end{aligned}$$

- درایه‌های ستون چهارم ماتریس H^T عبارت هستند از

$$h_{44} = \left(a_{44} - h_{41}^2 - h_{42}^2 - h_{43}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2.$$

بنابراین تجزیه چولسکی ماتریس A عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

۱.۷.۲ تعداد اعمال حسابی برای حل دستگاه معادلات خطی با الگوریتم چولسکی برای ماتریس اکیداً معین مثبت

تعداد اعمال حسابی برای حل یک دستگاه مثلثی را در زیربخش ۱.۴.۲ محاسبه کردیم. در این قسمت، تعداد اعمال حسابی برای تجزیه ماتریس با الگوریتم چولسکی را محاسبه و با تعداد اعمال حسابی مورد

نیاز برای حل دو دستگاه مثلثی جمع می‌کنیم.
تعداد اعمال حسابی برای تجزیه ماتریس با الگوریتم چولسکی:

$$
\begin{aligned}
\text{تعداد جذرها} &= n;\\
\text{تعداد ضرب‌ها} &= \Big(\overbrace{0 + (0+1) + (0+1+2) + \cdots + (0+1+\cdots+(n-2))}^{\text{از معادله دوم الگوریتم چولسکی}}\Big)\\
&\quad + \Big(\overbrace{1+2+\cdots+(n-1)}^{\text{از معادله سوم الگوریتم چولسکی}}\Big)\\
&= (n-2)\times 1 + (n-3)\times 2 + \cdots + 1\times(n-2) + \frac{n(n-1)}{2}\\
&= \sum_{k=1}^{n-2}(n-1-k)k + \frac{n(n-1)}{2}\\
&= (n-1)\sum_{k=1}^{n-2}k - \sum_{k=1}^{n-2}k^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3-n}{6};\\
\text{تعداد تقسیم‌ها} &= 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2};\\
\text{تعداد جمع‌ها} &= \text{تعداد ضرب‌ها} = \frac{n^3-n}{6}.
\end{aligned}
$$

با جمع این تعداد محاسبات با تعداد محاسبات لازم برای حل دو دستگاه مثلثی، داریم:

$$
\begin{aligned}
\text{تعداد جذرها} &= n;\\
\text{تعداد ضرب‌ها} &= \frac{n^3-n}{6} + 2\times\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3+6n^2-7n}{6};\\
\text{تعداد تقسیم‌ها} &= \frac{n(n-1)}{2} + 2n = \frac{n^2+3n}{2};\\
\text{تعداد جمع‌ها} &= \frac{n^3-n}{6} + 2\times\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3+6n^2-7n}{6},
\end{aligned}
$$

که تعداد کل محاسبات لازم الگوریتم چولسکی برای حل یک دستگاه n معادله با n مجهول را به‌دست می‌دهد. بنابراین تعداد اعمال لازم با الگوریتم چولسکی از مرتبه $\mathcal{O}(n^3/3)$ است در حالی که با GEM از مرتبه $\mathcal{O}(2n^3/3)$ است.

۸.۲ نرم‌های برداری و ماتریسی

در بخش‌های قبلی این فصل، روش‌های مستقیم برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ معرفی شد. این روش‌ها به تعداد زیادی اعمال حسابی نیاز دارند که از حساب ممیز شناور متناهی-رقم استفاده می‌کنند و لذا حاصل آن‌ها تقریبی از جواب دقیق خواهد بود. بنابراین، برای اندازه‌گیری خطای موجود در جواب تقریبی حاصل، نیاز به محاسبه بزرگی یک بردار یا ماتریس داریم که در ادامه به این موضوع پرداخته می‌شود.

تعریف ۳۱.۲ (نرم برداری) نگاشت $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ با ویژگی‌های

$$\text{(الف)}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| \geq ۰;$$
$$\text{(ب)}\ \|x\| = ۰ \iff x = \bar{o};$$
$$\text{(ج)}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|;$$
$$\text{(د)}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

یک *"نرم برداری"* روی $\mathbb{R}^n$ نامیده می‌شود.

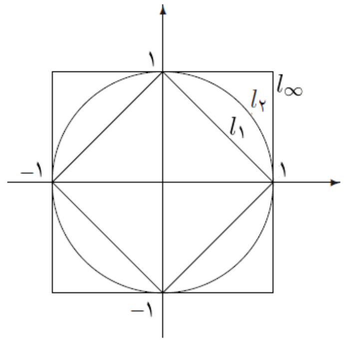
چند مثال از نرم‌های برداری در قالب تعریف زیر بیان می‌شود:

تعریف ۳۲.۲ نرم‌های $l_۱$، l_p و l_∞ برای بردار $x = [x_۱, x_۲, \dots, x_n]^T$ به‌ترتیب به صورت

$$\|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|,$$
$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{۱}{p}}, \quad p \geq ۱,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{۱\leq i\leq n} |x_i|,$$

تعریف می‌شوند.

در حالتی که $p = ۲$، نرم حاصل نرم اقلیدسی x نامیده می‌شود؛ زیرا برای حالتی که x متعلق به $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^۲$ یا $\mathbb{R}^۳$ باشد، این نرم فاصله x از مبدأ را ارائه می‌دهد. همچنین، در حالتی که $p = \infty$، نرم حاصل را نرم ماکزیمم می‌نامند. شکل ۳.۲، مرز بردارهایی در $\mathbb{R}^۲$ که نرم‌های $l_۱$، $l_۲$ و l_∞ کمتر از یک دارند را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۲: بردارهایی در $\mathbb{R}^2$ با نرم l_1، l_2 و l_∞ کمتر از یک داخل این شکل قرار دارند.

به عنوان یک تمرین ساده، بررسی برقراری ویژگی‌های (الف)، (ب) و (ج) نرم، برای نرم‌های l_1، l_2 و l_∞ تعریف شده در تعریف ۳۲.۲ به خواننده واگذار می‌شود. برای بررسی ویژگی (د) نرم، برای نرم‌های l_1 و l_∞، با فرض $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ و $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$، و با توجه به

$$|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

داریم

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + |y_i|\big) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1, \\
\|x+y\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \\
&\le \max_{1\le i\le n} \big\{|x_i| + |y_i|\big\} = \max_{1\le i\le n} |x_i| + \max_{1\le i\le n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.
\end{aligned}$$

برای بررسی ویژگی (د) نرم، برای نرم l_2، ابتدا قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۳۳.۲ (نامساوی کشی-بونیاکوفسکی-شوارتز برای مجموع‌ها) *به ازای هر*

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, \quad y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T,$$

در $\mathbb{R}^n$*، نامساوی*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2, \qquad (۳۰.۲)$$

برقرار است.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۷] رجوع شود. ■

با توجه به قضیه ۳۳.۲ داریم

$$\begin{aligned}\|x+y\|_۲^۲ &= \sum_{i=۱}^{n}(x_i+y_i)^۲ = \sum_{i=۱}^{n}x_i^۲ + ۲\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i + \sum_{i=۱}^{n}y_i^۲ \\ &\leq \|x\|_۲^۲ + ۲\|x\|_۲\cdot\|y\|_۲ + \|y\|_۲^۲ = (\|x\|_۲+\|y\|_۲)^۲.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|x+y\|_۲ \leq \|x\|_۲ + \|y\|_۲.$$

تعریف ۳۴.۲ هرگاه x و y بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند، فاصله بین این دو بردار به صورت $\|x-y\|$ تعریف می‌شود.

قضیه ۳۵.۲ *به ازای نرم برداری دلخواه $\|\cdot\|$، داریم*

$$|\|x\|-\|y\|| \leq \|x-y\|.$$

مثال ۳۶.۲ دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}۳/۳۳۳۰x_۱ + ۱۵۹۲۰x_۲ - ۱۰/۳۳۳x_۳ &= ۱۵۹۱۳,\\ ۲/۲۲۲۰x_۱ + ۱۶/۷۱۰x_۲ + ۹/۶۱۲۰x_۳ &= ۲۸/۵۴۴,\\ ۱/۵۶۱۱x_۱ + ۵/۱۷۹۱x_۲ + ۱/۶۸۵۲x_۳ &= ۸/۴۲۵۴,\end{aligned}$$

دارای جواب $[x_۱,x_۲,x_۳]^T = [۱,۱,۱]^T$ است. اگر GEM با محورگیری جزئی برای حل این دستگاه، در کامپیوتری که از حساب ممیز شناور پنج رقمی استفاده می‌کند، به‌کار رود، جواب تقریبی

$$\widetilde{x} = [\widetilde{x}_۱,\widetilde{x}_۲,\widetilde{x}_۳]^T = [۱/۲۰۰۱, ۰/۹۹۹۹۱, ۰/۹۲۵۳۸]^T,$$

به‌دست می‌آید. فاصله $l_۱$، $l_۲$ و l_∞ بین بردارهای جواب دقیق و جواب تقریبی برابر

$$\begin{aligned}\|x-\widetilde{x}\|_۱ &= ۰/۲۰۰۱ + ۰/۰۰۰۰۹ + ۰/۰۷۴۶۲ = ۰/۲۷۴۸۱,\\ \|x-\widetilde{x}\|_۲ &= \left(۰/۲۰۰۱^۲ + ۰/۰۰۰۰۹^۲ + ۰/۰۷۴۶۲^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۰/۲۱۳۵۶,\\ \|x-\widetilde{x}\|_\infty &= \max\{۰/۲۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۹, ۰/۰۷۴۶۲\} = ۰/۲۰۰۱,\end{aligned}$$

هستند. اگرچه مؤلفه‌های $\widetilde{x}_۲$ و $\widetilde{x}_۳$ تقریب‌های خوبی به‌ترتیب برای $x_۲$ و $x_۳$ هستند؛ ولی $\widetilde{x}_۱$ تقریب نامناسبی برای $x_۱$ بوده و در محاسبه نرم‌ها غالب می‌شود. ■

تعریف ۳۷.۲ دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارها در $\mathbb{R}^n$ نسبت به نرم $\|\cdot\|$ همگرا است هرگاه برداری مانند $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x^{(k)}\| = 0.$$

به عبارت دیگر، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح مثبتی مانند N_ε وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\forall k \geq N_\varepsilon, \quad \|x - x^{(k)}\| < \varepsilon.$$

بردار x را حد دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ نامیده و می‌نویسیم

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x.$$

لازم به ذکر است حد یک دنباله همگرا یکتاست.

تعریف ۳۸.۲ دو نرم $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$ را معادل گوییم، هرگاه همگرایی نسبت به یک نرم، همگرایی نسبت به نرم دیگر را نتیجه دهد؛ به عبارت دیگر، هرگاه اعداد ثابت و مثبت مانند M و m وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\forall\, x,\ m\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M\|x\|_b.$$

قضیه ۳۹.۲ *به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، داریم*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.$$

برهان. فرض کنید x_k درایه‌ای از x باشد که

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = |x_k|,$$

در این صورت، داریم

$$\begin{aligned}
|x_k|^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} 1\cdot|x_i|\Big)^2 \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} 1^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big) = n\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \\
&\leq n\sum_{i=1}^{n} |x_k|^2 = n^2|x_k|^2.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.$$

■

نکته ۴۰.۲ قضیه ۳۹.۲ نشان می‌دهد نرم‌های $\|\cdot\|_1$، $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ با هم معادل هستند. می‌توان نشان داد که تمام نرم‌ها روی $\mathbb{R}^n$ معادل هستند. به‌طور کلی، تمام نرم‌ها روی فضای با بُعد متناهی، معادل هستند.

تعریف ۴۱.۲ (نرم ماتریسی) فرض کنید $M_n(\mathbb{R})$ فضای برداری همه ماتریس‌های $n \times n$ روی $\mathbb{R}$ باشد. نگاشت $\|\cdot\|$ از $M_n(\mathbb{R})$ به $\mathbb{R}$ را *"نرم ماتریسی"* می‌نامند، هرگاه در شرایط

(الف) $\forall A \in M, \quad \|A\| \geq 0 \quad \& \quad \|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = \bar{O},$

(ب) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in M, \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|,$

(ج) $\forall A, B \in M, \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$

(د) $\forall A, B \in M, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$ «خاصیت زیرضربی نرم ماتریسی»

صدق کند.

تعریف ۴۲.۲ یک نرم ماتریسی $\|A\|$ با یک نرم برداری $\|x\|$ *"سازگار"* نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \ \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|. \tag{۳۱.۲}$$

با توجه به تعریف فوق، متناظر با هر نرم برداری مفروض، یک نرم ماتریسی سازگار با آن به صورت

$$\|A\| = \sup_{x \neq \bar{o}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \tag{۳۲.۲}$$

تعریف می‌کنیم. نرم ماتریسی تعریف شده با (۳۲.۲)، *"نرم طبیعی"* یا *"نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری"* نامیده می‌شود. این نرم را *"نرم القایی"* نیز می‌نامند. واضح است که از (۳۲.۲) رابطه (۳۱.۲) نتیجه می‌شود، به عبارت دیگر، نرم طبیعی یک نرم ماتریسی، سازگار است.
اگر قرار دهیم $z = \dfrac{x}{\|x\|}$، آن‌گاه برای $x \neq \bar{o}$، داریم $\|z\| = 1$ و $\|Az\| = \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. پس (۳۲.۲) معادل است با

$$\|A\| = \sup_{\|z\|=1} \|Az\|, \tag{۳۳.۲}$$

و چون مجموعه $\{z \ : \ \|z\| = 1\}$ بسته و کراندار است و $\|\cdot\|$ تابعی پیوسته است، پس (۳۳.۲) معادل است با

$$\|A\| = \max_{\|z\|=1} \|Az\|.$$

بنابراین رابطه فوق به عنوان تعریف نرم طبیعی در نظر گرفته می‌شود.

قضیه ۴۳.۲ *اگر $\|\cdot\|$ نرمی در $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه رابطه*

$$\|A\| = \max_{\|z\|=۱} \|Az\|,$$

یک نرم (نرم طبیعی) بر روی فضای خطی همه ماتریس‌های $n \times n$ تعریف می‌کند.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $\|A\| = ۰$ اگر و فقط اگر $A = \bar{O}$.
اگر $A = \bar{O}$، آن‌گاه به ازای هر z، $Az = \bar{o}$ و در نتیجه $\|Az\| = ۰$. بنابراین $\|A\| = ۰$. برعکس، فرض کنیم $\|A\| = ۰$، بنابراین

$$\forall\, z \;\; s.t. \;\; \|z\| = ۱ : \;\; \|Az\| = ۰.$$

حال اگر فرض کنیم $x = e_i$ و $z = \dfrac{x}{\|x\|}$، در این صورت Az برابر ستون iام A خواهد بود و چون داریم $\|Az\| = ۰$، بنابراین، نرم بردار ستون iام برابر صفر است. پس بنا به ویژگی‌های نرم برداری، ستون iام A صفر است و چون i می‌تواند از ۱ تا n تغییر کند، بنابراین $A = \bar{O}$.
حال نشان می‌دهیم برای $A \neq \bar{O}$، $\|A\| > ۰$. اگر $A \neq \bar{O}$، آن‌گاه حداقل یک ستون مخالف صفر دارد. فرض کنید ستون jام ماتریس A، یعنی $A^{(j)}$، مخالف صفر باشد. با قرار دادن $x = e_j$، به وضوح داریم $x \neq \bar{o}$ و $\|x\| > ۰$. فرض کنید $z = \dfrac{x}{\|x\|}$. بنا به تعریف $\|A\|$، داریم

$$\|A\| \geq \|Az\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{A^{(j)}}{\|x\|} \overset{\text{به بنا ویژگی نرم برداری}}{>} ۰.$$

همچنین با استفاده از ویژگی (ج) نرم بردارها، داریم

$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \max\big\{\|\lambda Az\| : \; \|z\| = ۱\big\} = \max\big\{|\lambda|\|Az\| : \; \|z\| = ۱\big\} \\ &= |\lambda| \max\big\{\|Az\| : \; \|z\| = ۱\big\} = |\lambda|\|A\|. \end{aligned}$$

برای اثبات ویژگی (ج) نرم ماتریسی، داریم

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \max\big\{\|(A+B)z\| : \|z\| = ۱\big\} \leq \max\big\{\|Az\| + \|Bz\| : \|z\| = ۱\big\} \\ &\leq \max\big\{\|Az\| : \|z\| = ۱\big\} + \max\big\{\|Bz\| : \|z\| = ۱\big\} \\ &= \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

برای اثبات ویژگی (د) نرم ماتریسی، فرض کنیم $z_۰$ برداری باشد که $\|z_۰\| = ۱$ پس $\|AB\| = \|(AB)z_۰\|$ و در نتیجه

$$\|AB\| = \|A(Bz_۰)\| \overset{\text{سازگاری نرم طبیعی}}{\leq} \|A\|\|Bz_۰\| \overset{\text{سازگاری نرم طبیعی}}{\leq} \|A\|\|B\|\|z_۰\| = \|A\|\|B\|.$$

■

به عنوان یک مثال از قضیه ۴۳.۲، نرم ماتریسی متناظر با نرم برداری $\|\cdot\|_\infty$ را تعیین می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty &= \max_{\|z\|_\infty=۱}\|Az\|_\infty = \max_{\|z\|_\infty=۱}\left(\max_{۱\le i\le n}|(Az)_i|\right)\\ &= \max_{۱\le i\le n}\left(\max_{\|z\|_\infty=۱}|(Az)_i|\right) = \max_{۱\le i\le n}\left(\max_{\|z\|_\infty=۱}\left|\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}z_j\right|\right)\\ &\le \max_{۱\le i\le n}\left(\max_{\|z\|_\infty=۱}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}z_j|\right) \le \max_{۱\le i\le n}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}|. \end{aligned} \tag{۳۴.۲}$$

حال فرض کنید p عدد صحیحی باشد به‌طوری‌که $۱ \le p \le n$ و

$$\sum_{j=۱}^{n}|a_{pj}| = \max_{۱\le i\le n}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}|.$$

بردار $x = [x_۱, x_۲, \ldots, x_n]^T$ را با درایه‌های

$$x_j = \begin{cases} ۱, & a_{pj} \ge ۰ \text{ اگر } \\ -۱, & a_{pj} < ۰ \text{ اگر } \end{cases}$$

در نظر بگیرید. به وضوح داریم $\|x\|_\infty = ۱$. همچنین، به ازای هر $j = ۱, ۲, \ldots, n$، داریم $a_{pj}x_j = |a_{pj}|$. از طرفی داریم

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max_{۱\le i\le n}\left|\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}x_j\right| \ge \left|\sum_{j=۱}^{n}a_{pj}x_j\right| = \left|\sum_{j=۱}^{n}|a_{pj}|\right| = \sum_{j=۱}^{n}|a_{pj}|\\ &= \max_{۱\le i\le n}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}|.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|A\|_\infty = \max_{\|z\|=۱}\|Az\| \ge \|Ax\|_\infty \ge \max_{۱\le i\le n}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}|. \tag{۳۵.۲}$$

حال از (۳۴.۲) و (۳۵.۲)، می‌توان قضیه زیر را بیان کرد:

قضیه ۴۴.۲ *نرم طبیعی متناظر با نرم برداری $\|\cdot\|_\infty$ به صورت*

$$\|A\|_\infty = \max_{۱\le i\le n}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}|,$$

مشخص می‌شود.

به‌طور مشابه، می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد:

قضیه ۴۵.۲ *نرم طبیعی متناظر با نرم برداری* $\|\cdot\|_1$ *به صورت*

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

مشخص می‌شود.

نکته ۴۶.۲ برای نرم ماتریسی دلخواه و سازگار داریم

$$\|x\| = \|Ix\| \leq \|I\|\|x\| \overset{x\neq\bar{o}}{\Longrightarrow} \|I\| \geq 1.$$

همچنین نرم طبیعی ماتریس همانی برابر یک است، در واقع

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

تعریف ۴۷.۲ شعاع طیفی ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ با $\rho(A)$ نمایش داده شده و به صورت

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|,$$

تعریف می‌شود، که در آن λ_iها، $i = 1, 2, \ldots, n$، مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

شعاع طیفی با نرم ماتریس ارتباط نزدیکی دارد، همان‌طور که در قضیه بعدی نشان داده شده است.

قضیه ۴۸.۲ *هرگاه* A *یک ماتریس حقیقی* $n \times n$ *باشد، آن‌گاه*

(*الف*) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$؛

(*ب*) *به ازای هر نرم طبیعی* $\|\cdot\|$، $\rho(A) \leq \|A\|$.

برهان. اثبات قسمت (الف) به اطلاعاتی در مورد مقادیر تکین ماتریس A نیاز دارد، که در درس جبر خطی عددی یا آنالیز عددی به آن پرداخته می‌شود. برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنید λ یک مقدار ویژه دلخواه ماتریس A و x بردار ویژه نظیر λ باشد، یعنی،

$$Ax = \lambda x.$$

بنابراین

$$|\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|,$$

و چون x بردار ویژه است، پس $x \neq \bar{o}$ و در نتیجه

$$|\lambda| \leq \|A\|,$$

از طرفی چون λ مقدار ویژه دلخواه بود، داریم

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

■

مثال ۴۹.۲ برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix},$$

داریم

$$A^T A = \begin{bmatrix} ۱۳ & -۷ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix}.$$

بنابراین، اگر λ مقدار ویژه $A^T A$ باشد، داریم

$$\lambda^۲ - ۱۸\lambda + ۱۶ = ۰ \Longrightarrow \lambda = ۹ \pm \sqrt{۶۵}.$$

در نتیجه

$$\|A\|_۱ = ۵; \qquad \|A\|_\infty = ۴; \qquad \|A\|_۲ = \sqrt{۹ + \sqrt{۶۵}} \approx ۴٫۱۳.$$

■

۹.۲ حالت دستگاه معادلات خطی

در فصل اول، راجع به حالت مساله (بد حالتی یا خوش حالتی) $y = f(x)$ بحث شد. در این بخش، حالت دستگاه معادلات خطی، عدد حالت متناظر با یک دستگاه و ارتباط این مفهوم با خوش حالتی یا بد حالتی آن بررسی خواهد شد. در دستگاه خطیِ $Ax = b$، درایه‌های ماتریس A و بردار ثابت b مقادیری هستند که از آزمایش یا محاسبات به‌دست آمده و لذا در معرض خطا هستند. علاوه بر این، وقتی این کمیت‌ها به کامپیوتر داده می‌شود یا GEM روی دستگاه اعمال می‌شود، خطای گردکردن نیز به‌وجود می‌آید.

۹.۲ حالت دستگاه معادلات خطی

در فصل اول، راجع به حالت مساله (بد حالتی یا خوش حالتی) $y = f(x)$ بحث شد. در این بخش، حالت دستگاه معادلات خطی، عدد حالت متناظر با یک دستگاه و ارتباط این مفهوم با خوش حالتی یا بد حالتی آن بررسی خواهد شد. در دستگاه خطیِ $Ax = b$، درایه‌های ماتریس A و بردار ثابت b مقادیری هستند که از آزمایش یا محاسبات به‌دست آمده و لذا در معرض خطا هستند. علاوه بر این، وقتی این کمیت‌ها به کامپیوتر داده می‌شود یا GEM روی دستگاه اعمال می‌شود، خطای گردکردن نیز به‌وجود می‌آید.

تعریف ۵۰.۲ اگر خطاهای کوچک در A یا b منجر به تغییرات کوچک در جواب x شود، دستگاه را *"خوش حالت"* و در غیر این صورت دستگاه، *"بد حالت"* نامیده می‌شود.

مثال ۵۱.۲ دستگاه خطی

$$\begin{cases} x + 1.01y = 1, \\ 1.01x + y = 0, \end{cases} \tag{۳۶.۲}$$

با جواب دقیق

$$x = -\frac{10000}{201}, \quad y = \frac{10100}{201},$$

بد حالت است؛ زیرا با اختلال اندکی در ماتریس ضرایب به صورت

$$\begin{cases} x + 0.99y = 1, \\ 0.99x + y = 0, \end{cases} \tag{۳۷.۲}$$

دستگاه جدید دارای جواب دقیق

$$x = \frac{10000}{199}, \quad y = -\frac{9900}{199},$$

است، که با جواب دستگاه (۳۶.۲) اختلافی فاحش دارد.
دستگاه‌های (۳۶.۲) و (۳۷.۲) همان دستگاه مثال ۶۱.۱، به‌ترتیب به ازای $\alpha = 1.01$ و $\alpha = 0.99$ هستند. همان‌طور که در فصل اول نیز اشاره شد، این دستگاه به ازای $\alpha \approx 1$ بد حالت است.
برای ماتریس ضرایب دستگاه (۳۶.۲)، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.01 \\ 1.01 & 1 \end{bmatrix},$$

داریم

$$\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 2.01 \times 10^2.$$

■

تعریف ۵۲.۲ عدد حالت ماتریس A با $\kappa(A)$ نمایش داده شده و به صورت

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

تعریف می‌شود. اگر ماتریس A تکین باشد، تعریف می‌شود

$$\kappa(A) = \infty.$$

نکته ۵۳.۲ لازم به ذکر است عدد حالت به نرم وابسته است. به‌هر حال، اگر عدد حالت نسبت به نرمی بزرگ باشد، نسبت به نرم‌های دیگر نیز بزرگ است. علاوه بر این، یک ویژگی عدد حالت این است که در هر نرم طبیعی، $\kappa(A) \geq ۱$. زیرا داریم

$$I = AA^{-۱} \Longrightarrow ۱ = \|I\| = \|AA^{-۱}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-۱}\| = \kappa(A).$$

در واقع، اگر $\kappa(A)$ نزدیک یک باشد، ماتریس A خوش وضع یا خوش حالت است و زمانی که به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از یک باشد، ماتریس A بد وضع یا بد حالت نامیده می‌شود.

مثال ۵۴.۲ به ازای هرعددی طبیعی $n \geq ۲$، ماتریس هیلبرت مرتبه n

$$H_n = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \cdots & \frac{۱}{n} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \cdots & \frac{۱}{n+۱} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{۱}{n} & \frac{۱}{n+۱} & \cdots & \frac{۱}{۲n-۱} \end{bmatrix},$$

بد حالت است. در واقع، برای نمونه، به ازای $n = ۲, ۳, ۴$، داریم

$$\kappa_\infty(H_۲) = ۲۷, \quad \kappa_\infty(H_۳) = ۷۴۸, \quad \kappa_\infty(H_۴) \approx ۲/۸۴ \times ۱۰^۴.$$

■

نکته ۵۵.۲ عدد حالت ماتریس A، خوش حالت یا بد حالت بودن دستگاه $Ax = b$ را مشخص می‌کند. در واقع برای ماتریس‌هایی که $\kappa(A)$ عددی بزرگ باشد، دستگاه $Ax = b$ بد حالت است. این مطلب، در ادامه طی چند قضیه نشان داده می‌شود.

نکته ۵۶.۲ (روشی برای محاسبه عدد حالت ماتریس اکیداً معین مثبت) فرض کنید ماتریس A ماتریسی اکیداً معین مثبت باشد (و در نتیجه متقارن). در این صورت $A^TA = A^۲$ و لذا $\rho(A^TA) = |\lambda_{\max}|^۲$، که در آن $\lambda_{\max}$ بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس A از نظر قدر مطلق است. همچنین، با توجه به اینکه A اکیداً معین مثبت است، مقادیر ویژه آن همگی حقیقی و مثبت هستند و در نتیجه

$$\|A\|_۲ = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\lambda_{\max}^۲} = \lambda_{\max}.$$

همچنین، از اینکه $\lambda(A^{-۱}) = \dfrac{۱}{\lambda(A)}$، داریم $\|A^{-۱}\|_۲ = \dfrac{۱}{\lambda_{\min}}$. بنابراین

$$\kappa_۲(A) = \|A\|_۲ \cdot \|A^{-۱}\|_۲ = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

اینک، این مطلب که بزرگ بودن $\kappa(A)$، منجر به بد حالت بودن دستگاه $Ax = b$ می‌شود، را در ادامه بررسی می‌کنیم.

۱.۹.۲ اختلال در بردار سمت راست b

فرض کنید در بردار سمت راست b خطایی وجود داشته باشد و به‌جای b بردار $\widetilde{b}$ را داشته باشیم. در این صورت بردار جواب $\widetilde{x}$ خواهد بود، یعنی داریم

$$Ax = b\,; \quad A\widetilde{x} = \widetilde{b}.$$

فرض کنید A ناتکین باشد. با تفریق دو رابطه فوق، داریم

$$A(x-\widetilde{x}) = b - \widetilde{b}. \tag{۳۸.۲}$$

چون $x - \widetilde{x}$، بردار خطا، در دست نیست، لذا می‌توان یک کران بالا برای آن به‌دست آورد. این کار با استفاده از نرم‌ها انجام می‌شود. از این پس، فرض خواهیم کرد که نرم ماتریس‌های به‌کار رفته، نرم طبیعی هستند. از (۳۸.۲)، داریم

$$\|x-\widetilde{x}\| = \|A^{-1}(b-\widetilde{b})\| \le \|A^{-1}\|\|b-\widetilde{b}\|.$$

این اندازه اختلال x را نشان می‌دهد. برای برآورد اختلال نسبی، داریم

$$\frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|} = \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|x\|}. \tag{۳۹.۲}$$

از آنجایی که $\|b\| \le \|A\|\|x\|$، پس داریم $\|x\| \ge \dfrac{\|b\|}{\|A\|}$، در نتیجه

$$\frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}. \tag{۴۰.۲}$$

بنابراین از (۳۹.۲) و (۴۰.۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|} \le \kappa(A) \cdot \frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|}. \tag{۴۱.۲}$$

همچنین از $A(x-\widetilde{x}) = b - \widetilde{b}$، داریم

$$\|b-\widetilde{b}\| \le \|A\|\|x-\widetilde{x}\| \Longrightarrow \frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|A\|} \le \|x-\widetilde{x}\|, \tag{۴۲.۲}$$

و از $x = A^{-1}b$، داریم

$$\|x\| \le \|A^{-1}\|\|b\| \Longrightarrow \frac{1}{\|A^{-1}\|\|b\|} \le \frac{1}{\|x\|}, \tag{۴۳.۲}$$

در نتیجه از (۴۲.۲) و (۴۳.۲) خواهیم داشت

$$\frac{1}{\kappa(A)} \cdot \frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|}. \tag{۴۴.۲}$$

اینک از (۴۱.۲) و (۴۴.۲)، می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\kappa(A)} \cdot \delta(b) \leq \frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \cdot \delta(b), \tag{۴۵.۲}$$

که در آن $\delta(b) := \frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|}$ خطای نسبی در بردار b است.

نامساوی سمت راست (۴۵.۲) نشان می‌دهد که خطای نسبی در x از $\kappa(A)$ برابر خطای نسبی در b بزرگ‌تر نیست. از این نامساوی ملاحظه می‌کنیم که اگر عدد حالت کوچک باشد، آن‌گاه اختلال کوچکی در b منجر به اختلال کوچکی در x می‌شود. همچنین اگر عدد حالت ماتریس A بزرگ باشد، آن‌گاه یک اختلال نسبی کوچک در b ممکن است یک اختلال نسبی بزرگی را در جواب دستگاه $Ax = b$ ایجاد کند. به عنوان مثال و برای توضیح بیشتر، ماتریس ضرایب دستگاه مثال ۶۱.۱، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید. معکوس این ماتریس به صورت

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha^2-1} & \frac{\alpha}{\alpha^2-1} \\ \frac{\alpha}{\alpha^2-1} & -\frac{1}{\alpha^2-1} \end{bmatrix},$$

است. با استفاده از نرم-بی‌نهایت برای $\alpha > 0$ داریم

$$\|A\|_\infty = \alpha + 1, \quad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|\alpha - 1|}.$$

بنابراین

$$\kappa(A) = \frac{\alpha+1}{|\alpha-1|}.$$

با توجه به عدد حالت، ملاحظه می‌شود این دستگاه به ازای $\alpha \approx 1$ یک دستگاه بد حالت است. به عنوان مثال به ازای $\alpha = 1/001$، داریم

$$\kappa(A) = 2/001 \times 10^3,$$

در چنین حالتی یک اختلال نسبی کوچک در b ممکن است یک اختلال نسبی 2×10^3 بار بزرگ‌تر را در جواب $Ax = b$ ایجاد کند.

۲.۹.۲ اختلال در درایه‌های ماتریس A

قضیه ۵۷.۲ *فرض کنید A ماتریسی ناتکین باشد و $x + \delta x$ جواب دستگاه $(A + \delta A)x = b$ و x جواب دقیق $Ax = b$ باشند. همچنین فرض کنید $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$. در این صورت داریم*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A) \cdot \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \kappa(A) \cdot \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}. \qquad (۴۶.۲)$$

برهان. داریم

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b \Longrightarrow \overbrace{Ax}^{=b} + A\delta x + \delta A(x+\delta x) = b \Longrightarrow A\delta x = -\delta A(x+\delta x).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \delta x = -A^{-1}\delta A(x + \delta x) &\Longrightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\big(\|x\| + \|\delta x\|\big) \\ &\Longrightarrow \|\delta x\|\big(1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|\big) \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x\|. \end{aligned}$$

بنا به فرض $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$، داریم $1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\| > 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|A^{-1}\|\|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} \\ &= \frac{\kappa(A) \cdot \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \kappa(A) \cdot \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}. \end{aligned}$$

■

از نامساوی (۴۶.۲) نتیجه می‌شود که برای ماتریس خوش حالت A، تغییرات کوچک در A، تغییرات کوچک در بردار جواب x ایجاد می‌کند؛ ولی برای ماتریس بد حالت A، تغییرات کوچک در A ممکن است تغییرات فاحشی در بردار جواب x ایجاد کند.

۳.۹.۲ اختلال در درایه‌های بردار b و درایه‌های ماتریس A

قضیه ۵۸.۲ *فرض کنید A ناتکین و $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ باشد. جواب $x + \delta x$ از $(A+\delta A)x = b + \delta b$ جواب x از $Ax = b$ را با تخمین خطای*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\Big(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\Big), \tag{۴۷.۲}$$

تقریب می‌کند.

برهان. داریم

$$\begin{aligned}(A+\delta A)(x+\delta x) = b + \delta b &\Longrightarrow \overbrace{Ax}^{=b} + A\delta x + \delta A(x+\delta x) = b + \delta b\\ &\Longrightarrow A\delta x = \delta b - \delta A(x+\delta x).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&\delta x = A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta A(x+\delta x)\\ &\quad\Longrightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\big(\|x\| + \|\delta x\|\big)\\ &\quad\Longrightarrow \|\delta x\|\big(1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|\big) \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x\|.\end{aligned}$$

بنا به فرض $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$، داریم $1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\| > 0$. بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|A^{-1}\|\|\delta b\|}{\big(1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|\big)\|x\|} + \frac{\|A^{-1}\|\|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}\\ &= \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|A\|\|x\|} + \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\\ &\leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.\end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\Big(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\Big).$$

■

مثال. فرض کنید $\varepsilon > 0$ و

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1+\varepsilon\\ 1-\varepsilon & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\varepsilon^{-2}\begin{pmatrix}1 & -1-\varepsilon\\ -1+\varepsilon & 1\end{pmatrix}$$

اختلال در درایه‌های ماتریس A

قضیه. فرض کنید A ماتریس نامنفرد و $x+\delta x$ جواب دستگاه $(A+\delta A)x=b$ باشد که در آن x جواب دقیق $Ax=b$ است. همچنین فرض کنید $\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$.

در این صورت

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq\frac{K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

تخمین فوق بیان می‌کند که برای ماتریس‌های خوش حالت، تغییرات کوچک در A، باعث تغییرات کوچک در x می‌شود ولی برای ماتریس‌های بدحالت، تغییرات کوچک در A ممکن است باعث تغییرات فاحش در x شود.

مثال. فرض کنید A یک ماتریس نامنفرد و $x+\delta x$ جواب دستگاه $(A+\delta A)\tilde{x}=b$ و x جواب دستگاه $Ax=b$ باشد. نشان دهید

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|}\leq K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Ex1, PS7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1-\varepsilon \\ -1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 2+\varepsilon, \quad \|A^{-1}\|_\infty = \varepsilon^{-2}(2+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow K(A) = \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \geqslant 4/\varepsilon^2$$

اگر $\varepsilon \leqslant 0.01$ آن‌گاه $K(A) > 4\times 10^4$. به عبارت دیگر یک اختلال نسبی کوچک در b ممکن است یک اختلال نسبی 4×10^4 بار بزرگتر را در جواب $Ax=b$ ایجاد کند.

Ex2, PS7

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b \Rightarrow \overbrace{Ax}^{b} + A\delta x + \delta A(x+\delta x) = b$$

$$\Rightarrow A\delta x = -\delta A(x+\delta x)$$

$$\Rightarrow \delta x = A^{-1}(-\delta A)(x+\delta x)$$

$$\Rightarrow \|\delta x\| \leqslant \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x+\delta x\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leqslant \|A^{-1}\| \|\delta A\| = K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

بردار مانده

اگر دستگاه معادلات $Ax=b$ را به طور عددی حل کنیم، جواب واقعی x را بدست نمی‌آوریم بلکه یک جواب تقریبی مانند $\tilde{x}$ بدست می‌آید. یک راه تعیین دقت $\tilde{x}$، تعیین آن است که $\tilde{x}$ به چه نزدیکی در دستگاه صدق می‌کند. در واقع، می‌توان با تشکیل $A\tilde{x}$ و بررسی اینکه آیا نزدیک به b است یا نه، $\tilde{x}$ را آزمایش کرد. لذا "بردار مانده" را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r = b - A\tilde{x},$$

تفاوت بین جواب واقعی x و جواب تقریبی $\tilde{x}$ را بردار خطا نامیده و با e نمایش می‌دهیم

$$e = x - \tilde{x}.$$

لذا رابطه $Ae = r$ بین بردار خطا و بردار مانده از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. توجه کنید $\tilde{x}$ جواب واقعی دستگاه $A\tilde{x} = \tilde{b}$ است که یک اختلال در طرف راست $\tilde{b} = b - r$ را دارا است.

حال رابطه‌ای بین خطای نسبی x و b برقرار می‌سازیم.

قضیه. هرگاه $\tilde{x}$ تقریبی بر جواب $Ax=b$ و A ماتریس نامنفرد باشد آنگاه برای هر نرم طبیعی

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \|x - \tilde{x}\| \leq \|r\| \, \|A^{-1}\|$$

و به شرط آنکه $x \neq 0$ و $b \neq 0$ داریم

$$\frac{1}{K(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

اثبات. از اینکه $x - \tilde{x} = A^{-1}(b - \tilde{b})$ (که $\tilde{b} = b - r$) داریم $x - \tilde{x} = A^{-1} r$. لذا

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|r\|$$

همچنین داریم $A(x - \tilde{x}) = b - \tilde{b} = r$. لذا $\|A\| \, \|x - \tilde{x}\| \geq \|r\|$ یا

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \|x - \tilde{x}\|.$$

قسمت دوم قضیه از یک بحث مربوط به اختلال در بردار سمت راست b با بردار اختلال $\tilde{b} - b = r$ بدست می‌آید.

تبصره. قضیه فوق بیان می‌کند در حالتی که ماتریس خوش‌حالت باشد، کوچک بودن بردار مانده دلیل دقت خوب جواب تقریبی است و در حالتی که بدحالت باشد، کوچک بودن بردار مانده دلیل بر دقت خوب جواب تقریبی نمی‌شود. به عنوان مثال، دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$$

دستگاه دارای جواب $x = (1,1)^T$ است. تقریب $\tilde{x} = (3,0)^T$

برای این دستگاه دارای بردار مانده زیر است.

$$r = b - A\tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0002 \end{pmatrix}$$

لذا $\|r\|_\infty = 0.0002$ ولی با این وجود داریم

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty = 2$$

بنابراین با اینکه نرم بردار مانده کوچک است ولی تقریب $\tilde{x} = (3,0)^T$ به تقریبی کاملاً نامناسب است (به خاطر بزرگی خطای مطلق) که این به خاطر بد حالت بودن ماتریس A است. در واقع

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_\infty = 3.0001, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 20000$$

$$\Rightarrow K(A) = 60002 \gg 1$$

قضیه. فرض کنید A ماتریس نامنفرد و B یک ماتریس منفرد باشد. در این صورت

$$\frac{1}{\|A-B\|} \leq \|A^{-1}\|$$

اثبات. چون B یک ماتریس منفرد است لذا بردار $x \neq 0$ ای موجود است به طوری که $Bx = 0$.

لذا برای این x داریم

$$\|Ax\| = \|Ax - Bx\| = \|(A-B)x\| \leq \|A-B\| \|x\| \qquad (1)$$

از طرفی

$$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\| \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\,\&\,(2)} \|Ax\| \leq \|A-B\| \|A^{-1}\| \|Ax\|$$

چون A نامنفرد و $x \neq 0$، داریم

$$1 \leq \|A-B\| \|A^{-1}\|$$

با توجه به اینکه $\|A-B\| \neq 0$ داریم

$$\frac{1}{\|A-B\|} \leq \|A^{-1}\|.$$

نتیجه 1. اگر A یک ماتریس نامنفرد و B ماتریسی با ویژگی $\|A^{-1}\| < \frac{1}{\|A-B\|}$ باشد آن‌گاه B نیز نامنفرد است.

نتیجه 2. اگر C ماتریسی باشد که $\|I-C\| < 1$، آن‌گاه C نامنفرد است
(به طور مشابه اگر $\|D\| < 1$، آن‌گاه $I - D$ نامنفرد است).

تبصره. اگر $\|D\| < 1$، آن‌گاه $I+D$ نامنفرد است زیرا $\|D\| = \|-D\|$.
بنابراین اگر نرم ماتریس D اکیداً از یک کمتر باشد آن‌گاه $I \pm D$ نامنفرد است.

قضیه. اگر برای ماتریس C داشته باشیم $\|C\| < 1$ و تعریف کنیم $D = (I+C)^{-1} - I$ آن‌گاه

$$\|D\| \leq \frac{\|C\|}{1-\|C\|}$$

قضیه. اگر A ماتریس $n\times n$ باشد بطوریکه $\|A\|<1$ آنگاه $I-A$ نامنفرد است و

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} A^{k}$$

تبصره. ماتریس $n\times n$، A را همگرا نامیم هرگاه $\lim_{m\to\infty} A^{m}=0$. بعبارت دیگر $\lim_{m\to\infty} (A^{m})_{ij}=0$ به ازای هر $i, j=1, \ldots, n$.

رابطه بین شعاع طیفی یک ماتریس و همگرایی آن را می‌توان در قضیه زیر بیان کرد.

قضیه. احکام زیر معادلند.

(الف) A ماتریس همگرا است؛

(ب) به ازای نرم دلخواه $\|\cdot\|$، $\lim_{n\to\infty}\|A^{n}\|=0$؛

(ج) $\rho(A)<1$.

تبصره. از معادله $(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{m} A^{k}$، وقتی $\|A\|<1$ داریم

$$\|(I-A)^{-1}\|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^{k}=\frac{1}{1-\|A\|}$$

مثال. فرض کنید $B_k=\sum_{j=0}^{k} A^{j}$. نشان دهید دنباله $\{B_k\}$ را می‌توان با استفاده از رابطه بازگشتی

$$B_0=I,\quad B_{k+1}=I+AB_k$$

تولید کرد.

مثال. با استفاده از سری نیومن، معکوس ماتریس زیر را بیابید.

$$B=\begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3\\ 0.1 & 1.0 & -0.1\\ 0.3 & 0.2 & 1.1\end{pmatrix}$$

سری نویمان و قضیه تکراری

قضیه. اگر A ماتریس $n\times n$ باشد به طوری که $\|A\|<1$، آن‌گاه $I-A$ نامنفرد است و

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} A^{k}$$

اثبات. بنابر نتیجه 2 صفحه 61، $I-A$ نامنفرد است. نشان می‌دهیم مجموع جزئی سری نویمان به $(I-A)^{-1}$ همگرا می‌شود یعنی،

$$\sum_{k=0}^{m} A^{k} \longrightarrow (I-A)^{-1} \quad \text{as } m\to\infty$$

کافی است ثابت کنیم

$$(I-A)\sum_{k=0}^{m} A^{k} \longrightarrow I$$

طرف چپ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(I-A)\sum_{k=0}^{m} A^{k}=\sum_{k=0}^{m}\left(A^{k}-A^{k+1}\right)=A^{0}-A^{m+1}=I-A^{m+1} \quad (1)$$

داریم

$$0\leq\|A^{m+1}\|\leq\|A\|^{m+1}\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\|A^{m+1}\|=0$$

چون $\|\cdot\|$ تابعی پیوسته است داریم

$$\lim_{m\to\infty} A^{m+1}=0 \qquad (2)$$

با توجه به (1) و (2) داریم

$$\lim_{m\to\infty}(I-A)\sum_{k=0}^{m} A^{k}=I.$$

تبصره. ماتریس $n\times n$ مانند A را همگرا می‌نامیم هرگاه $\lim_{m\to\infty} A^{m}=0$.

به عبارت دیگر $\lim_{m\to\infty}(A^{m})_{ij}=0$ برای هر $i,j=1,2,\dots,n$.

مثال. فرض کنید $B_k=\sum_{j=0}^{k} A^j$. نشان دهید که دنباله‌ی $\{B_k\}$ می‌تواند به طور بازگشتی توسط فرمول‌های $B_0=I$ ، $B_{k+1}=I+AB_k$ محاسبه شود.

حل. از $B_k=\sum_{j=0}^{k} A^j$ ، بوضوح $B_0=I$ است؛ همچنین داریم:

$$B_{k+1}=\sum_{j=0}^{k+1} A^j = I+\sum_{j=1}^{k+1} A^j = I+\sum_{j=0}^{k} A^{j+1} = I+A\sum_{j=0}^{k} A^j = I+AB_k.$$

مثال. با استفاده از سری نویمان معکوس ماتریس زیر را تقریب بزنید.

$$B=\begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ 0.1 & 1.0 & -0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 1.1 \end{bmatrix}$$

حل. فرض کنید $B=I-A$ ، که در آن

$$A=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.3 & -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

چون $\|A\|_\infty=0.6<1$ ، سری نویمان $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ به B^{-1} همگرا خواهد شد. با استفاده از الگوریتم مثال فوق، برخی از مجموع‌های جزئی را محاسبه می‌کنیم:

$$B_0=\sum_{k=0}^{0} A^k=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\sum_{k=0}^{1} A^k = I+AB_0=\begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 1.0 & 0.1 \\ -0.3 & -0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_2=\sum_{k=0}^{2} A^k = I+AB_1=\begin{bmatrix} 1.00 & 0.16 & 0.32 \\ -0.14 & 0.96 & 0.06 \\ -0.28 & -0.24 & 0.80 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$B_{19}=\sum_{k=0}^{19} A^k = I+AB_{18}=\begin{bmatrix} 1.00000000 & 0.14285714 & 0.28571429 \\ -0.12500000 & 0.96428571 & 0.05357143 \\ -0.25000000 & -0.21428571 & 0.82142857 \end{bmatrix}.$$

B_{19} ، B^{-1} را با دقت 8 رقم اعشار نشان می‌دهد.

فصل دوم روش های تکراری حل دستگاههای خطی

الگوریتم گاوس و انواع آن روش های مستقیم برای حل دستگاه معادلات خطی $AX=b$ نامیده می شوند. آن ها بعد از انجام یک تعداد متناهی مرحله (گام) یک جواب را تولید می کنند که باید دقیق (کاملاً) باشند اما به خاطر خطاهای گردکردن چنین نیست.
یک روش غیر مستقیم برعکس، یک دنباله از بردارها را تولید می کند که به طور ایده ال به جواب همگرا می شوند. محاسبات زمانی متوقف می شوند که یک جواب تقریبی دارای دقت مشخص باشد و یا تعداد تکرارها از یک تعداد معین بیشتر شود. روش های غیر مستقیم تقریباً همیشه از نوع تکراری هستند. یک فرایند ساده به طور تکراری اعمال می شود تا دنباله ذکر شده، تولید شود.
برای دستگاههای بزرگ شامل هزاران معادله، روش های تکراری اکثر مواقع از نظر سرعت و حافظه مورد نیاز بر روی کامپیوتر بر روش های مستقیم مزیت های قاطع دارند. در بعضی از مواقع اگر دقت مورد نیاز بزرگ نباشد، یک تعداد کم تکرار برای تولید یک جواب قابل پذیرش کافی خواهد بود. برای دستگاههای تُنُک (که در آن ها یک نسبت بزرگی از عناصر A برابر صفر هستند) روش های تکراری اغلب کارا هستند. گاهی اوقات، در مسایل تنک عناصر غیر صفر A در قالب حافظه تنک ذخیره می شوند، به عبارت دیگر، به هیچ وجه لازم نیست A ذخیره شود! این وضعیت در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی متداول است. در این حالت، هر سطر A ممکن است به هنگام نیاز تولید شود و بعد از استفاده نگهداری و ضبط نگردد. مزیت دیگر روش های تکراری در این است که آن ها معمولاً پایدار هستند و عملاً هنگامی که فرایند ادامه می یابد خطاها (ناشی از گرد کردن و یا اشتباههای کوچک سهوی) را از بین می برند.

پیش از بررسی روش های تکراری برای حل دستگاههای خطی، لازم است روشی برای اندازه گیری کمی فاصله بین بردارهای موجود در $\mathbb{R}^n$، یعنی مجموعه تمامی بردارهای ستونی با مولفه های حقیقی ارائه شود تا اینکه معین کنیم آیا دنباله ای از بردارها که از بکار بردن یک تکنیک تکراری نتیجه شده اند به جوابی از دستگاه همگرا هستند. در واقع، این اندازه زمانی که جواب با روش های مستقیم ارائه شده در فصل قبل بدست آمده باشد نیز مورد نیاز است زیرا این روش ها محتاج انجام تعداد زیادی عملیات حسابی است و استفاده از حساب ارقام متناهی فقط منجر به جوابی تقریبی از جواب واقعی دستگاه خواهد شد. برای تعریف یک فاصله در $\mathbb{R}^n$، ایده هم یک بردار معرفی می شود.

روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی

یک روش تکراری برای حل دستگاه $Ax=b$، با یک تقریب اولیه $x^{(0)}$ برای جواب x شروع می‌کند و دنباله‌ای از بردارهای $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ را تولید می‌کند که به x همگراست. اکثر این روش‌های تکراری شامل فرآیندی است که دستگاه $Ax=b$ را به دستگاهی معادل آن به فرم $x=Tx+c$ تبدیل می‌کنند. با انتخاب بردار اولیه $x^{(0)}$ دنباله‌ای بردارهای تقریب به جواب با محاسبه

$$x^{(k+1)}=Tx^{(k)}+c\,,\quad k=0,1,2,\dots$$

تولید می‌شود، که در آن T را ماتریس تکرار روش می‌نامند.

روش تکراری ژاکوبی:

در این روش ماتریس A را بصورت زیر می‌نویسیم

$$A=D+E+F$$

که در آن D ماتریس قطری از عناصر قطری A، E ماتریس پایین مثلثی اکید از عناصر e_{ij} که به صورت

$$e_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i>j \\ 0, & i\le j \end{cases}$$

تعریف می‌شوند، و F ماتریس بالا مثلثی اکید از عناصر f_{ij} که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i<j \\ 0, & i\ge j. \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$Ax=b \Rightarrow (D+E+F)x=b \Rightarrow Dx=(-E-F)x+b$$

$$\Rightarrow x=-D^{-1}(E+F)x+D^{-1}b \Rightarrow x=T_jx+c_j$$

که در آن T_j ماتریس تکرار روش ژاکوبی است و به صورت $T_j=-D^{-1}(E+F)$ تعریف می‌شود و c_j بردار ثابت است که به صورت $c_j=D^{-1}b$ تعریف می‌شود.

حال قرار می‌دهیم

$$x^{(k+1)} = T_j x^{(k)} + c_j \quad , k=0,1,\dots$$

و به صورت مولفه‌ای داریم

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad , \quad i=1,2,\dots,n$$

ملاحظه کردیم که در این روش لازم است ماتریس قطری D که عناصر قطری ماتریس A است نامنفرد باشد ($\forall i: a_{ii}\neq 0$ شرط لازم برای این روش است) در غیر این صورت معادلات را جابجا می‌کنیم تا شرط $\forall i: a_{ii}\neq 0$ برقرار باشد.

در عمل برای حل دستگاه $Ax=b$ به روش ژاکوبی ابتدا معادلات دستگاه را بفرم زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right)\\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n\right) \qquad (*)\\
&\vdots\\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

سپس یک تقریب اولیه برای جواب دستگاه $Ax=b$ انتخاب نموده (معمولاً بردار $x^{(0)}=\bar{0}$) و در طرف راست معادلات (*) قرار می‌دهیم تا مقادیر جدید برای x_iها $1\le i\le n$، بدست آوریم. مجدداً این مقادیر بدست آمده را در طرف راست (*) قرار می‌دهیم تا مقادیر جدیدتری برای x_iها $1\le i\le n$، بدست آید. و این عمل را ادامه می‌دهیم و تکرار را موقعی متوقف می‌کنیم که دو مقدار متوالی برای x_i ($i=1,\dots,n$) بقدر کافی بهم نزدیک باشند، یعنی برای $\varepsilon>0$ داده شده داشته باشیم

$$\left|x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)}\right| < \varepsilon, \quad i=1,\dots,n \;;$$

یا به طور معادل

$$\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_\infty < \varepsilon.$$

مثال. دستگاه زیر را به روش ژاکوبی حل کنید.

$$\begin{aligned} 20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18. \end{aligned}$$

حل. داریم

$$\begin{cases} x_1 = 0.85 - 0.05x_2 + 0.05x_3 \\ x_2 = -1.3 + 0.1x_1 + 0.1x_3 \\ x_3 = 1.8 + 0.1x_1 - 0.1x_3 \end{cases}$$

حال تکرارها را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

x_i	تقریب اولیه	تکرار اول	تکرار دوم	تکرار سوم	تکرار چهارم	تکرار پنجم	تکرار ششم	جواب دقیق
x_1	0	0.850	1.005	1.0025	1.0001	0.99997	1.0000	1
x_2	0	-1.3	-1.035	-0.9980	-0.99935	-0.99999	-1.0000	-1
x_3	0	1.8	2.0105	2.0040	2.0000	1.9999	2.0000	2

می‌بینیم که تقریب ششم تقریب مناسبی است.

روش تکراری گاوس-سایدل.

در این روش، با در نظر گرفتن ماتریسهای D، E و F همانند روش ژاکوبی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$Ax = b \Rightarrow (D+E+F)x = b \Rightarrow (D+E)x = -Fx + b \Rightarrow x = -(D+E)^{-1}Fx + (D+E)^{-1}b$$

$$\Rightarrow x = T_g x + c_g.$$

که در آن ماتریس T_g و بردار c_g به صورت زیرند:

$$\begin{cases} T_g = -(D+E)^{-1}F \\ c_g = (D+E)^{-1}b \end{cases}$$

حال مثالی می‌دهیم:

$$x^{(k+1)} = -(D+E)^{-1}Fx^{(k)} + (D+E)^{-1}b, \quad k=0,1,2,\dots$$

و یا به صورت مولفه‌ای داریم

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i=1,\dots,n$$

در واقع، روش تکراری گاوس-سایدل مشابه روش ژاکوبی است با این تفاوت که در اینجا به محض اینکه در تکراری مولفه‌ای بدست آمد، در همان تکرار از آن برای محاسبه مولفه‌های بعدی استفاده می‌کنیم.

مثال. مثال قبلی را با روش گاوس-سایدل حل کنید.

حل. داریم

$$x_1^{(k+1)} = 0.85 - 0.05x_2^{(k)} + 0.05x_3^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = -1.3 + 0.1x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = 1.8 + 0.1x_1^{(k+1)} - 0.1x_3^{(k+1)}$$

نتایج را به ازای تقریب اولیه $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

x_i	تقریب اولیه	تکرار اول	تکرار دوم	تکرار سوم	تکرار چهارم	جواب دقیق
x_1	0	0.850	1.0111	0.99995	1.0000	1
x_2	0	-1.2150	-0.99824	-0.99992	-1.0000	-1
x_3	0	2.0065	2.0009	2.0000	2.0000	2

پس از 4 تکرار به جواب با 5 رقم با معنا دقیق رسیدیم (در صورتیکه با روش ژاکوبی پس از 6 تکرار به این تقریب رسیده بودیم)

عموماً همگرایی روش گاوس-سایدل سریعتر از روش ژاکوبی است، ولی مثالهایی هم وجود دارند که برای آنها همگرایی روش ژاکوبی سریعتر است.

تذکر: روشهای ژاکوبی و گاوس-سایدل (در کل روشهای تکراری) همیشه همگرا نیستند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. دستگاه زیر را با روش گاوس سایدل حل کنید.

$$(1)\begin{cases} x-2y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

حل. تقریب اولیه را $x^{(0)}=y^{(0)}=0$ انتخاب می‌کنیم. داریم

$$x^{(1)}=4-2y^{(0)}=4$$
$$y^{(1)}=3-2x^{(1)}=-5$$

و نتایج تکرارهای بعدی را در جدول خلاصه می‌کنیم:

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	0	0
1	4	-5
2	-6	15
3	34	-65
4	-126	255

ملاحظه می‌شود که دنباله‌های $\{x^{(k)}\}$ و $\{y^{(k)}\}$ همگرا نیستند.

اکنون دستگاه را بصورت زیر می‌نویسیم و آن را با روش گاوس سایدل حل می‌کنیم (جای سطر اول و دوم را عوض می‌کنیم)

$$(2)\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=4 \end{cases}$$

با $x^{(0)}=y^{(0)}=0$، داریم

$$x^{(1)}=\frac{1}{2}(3-y^{(0)})=1.5000$$
$$y^{(1)}=\frac{1}{2}(-4+x^{(1)})=-1.2500$$

با ادامه محاسبات در تکرار 8، بدست می‌آوریم

$$x^{(8)}=2.0003 \quad \& \quad y^{(8)}=-0.99998$$

پس این بار تکرارها به سمت جواب دستگاه که عبارتست از $(x,y)=(2,-1)$ همگرا هستند. ▲

چرا با اینکه دستگاههای فوق جوابهای یکسانی دارند، به روش گاوس سایدل برای یکی واگرا و برای دیگری همگراست؟

دلیل آن را باید در ماتریس ضرایب دو دستگاه جستجو کرد. در واقع ماتریس دستگاه (2) دارای خاصیت اکیداً غالب قطری سطری است و به ماتریس دستگاه (1) چنین خصوصیتی ندارد. در ادامه، شرایط همگرایی روشهای تکراری را بررسی می‌کنیم.

تعریف. یک روش تکراری

$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ ، $k=0,1,\dots$ ، $x^{(0)}$ دلخواه باشد

با $Ax=b$ سازگار گفته می‌شود، اگر T و c چنان باشند که

$$x = Tx + c$$

یا به طور معادل داشته باشیم $c = (I-T)A^{-1}b$.

قضیه. فرض کنید روش تکراری $x^{(k+1)} = Tx^{(k)}+c$ ، $k=0,1,2,\dots$ سازگار باشد. در این صورت دنباله‌ی بردارهای $\{x^{(k)}\}$ همگرا به جواب $Ax=b$ است (به ازای هر $x^{(0)}$ انتخابی)، اگر و فقط اگر $\rho(T)<1$.

اثبات. بنا به $x^{(k+1)} = Tx^{(k)}+c$ و اینکه روش سازگار است (پس $x = Tx+c$)، داریم

$$e^{(k+1)} = T^{k+1} e^{(0)} \quad , \quad e^{(k)} = x - x^{(k)}.$$

و بنابراین

$$\|e^{(k)}\| \le \|T^k\| \, \|e^{(0)}\| \quad , k=0,1,\dots \qquad (*)$$

بنا به معادل بودن $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|=0$ و $\rho(A)<1$ ، از $(*)$ نتیجه می‌گیریم $\lim_{k\to\infty}\|e^{(k)}\|=0$ اگر و فقط اگر $\rho(T)<1$. به عبارتی روش تکراری مفروض به ازای هر $x^{(0)}$ انتخابی همگراست $\Leftrightarrow$ $\rho(T)<1$.

قضیه. اگر در دستگاه $Ax=b$ ، ماتریس A اکیداً غالب قطری سطری باشد، آن گاه روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل برای هر حدس اولیه‌ی $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})^T$ همگرا به جواب دستگاه هستند.

(ابتدا دقت می‌کنیم که روش ژاکوبی سازگار است.)

اثبات. ابتدا همگرایی روش ژاکوبی را اثبات می‌کنیم. ماتریس تکرار روش ژاکوبی $T_j = -D^{-1}(E+F)$ است. داریم

در حالت قطری غالبی اکید است پس این کمتر از یک است

$$\|T_j\|_\infty = \|-D^{-1}(E+F)\|_\infty = \|D^{-1}(E+F)\|_\infty = \max_i \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1$$

پس داریم

$$\rho(T_j) \le \|T_j\|_\infty < 1 \Rightarrow \rho(T_j) < 1$$

و لذا بنا به قضیه‌ی فوق روش ژاکوبی همگراست. در ادامه همگرایی روش گاوس-سایدل را ثابت می‌کنیم:

با توجه به سازگاری روش گاوس سایدل کافی است ثابت کنیم

$$\rho(T_g) < 1.$$

فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ی دلخواهی از $T_g = -(D+E)^{-1}F$ باشد و فرض کنید x بردار ویژه‌ی متناظر با آن باشد. بدون اینکه به کلیت اثبات خللی وارد شود، فرض کنیم $\|x\|_\infty = 1$. داریم

$$-(D+E)^{-1}Fx = \lambda x \Longrightarrow -Fx = \lambda(D+E)x$$

$$\Longrightarrow -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j \quad , \quad i=1,\dots,n$$

با جابجا کردن جملات، خواهیم داشت:

$$\lambda a_{ii} x_i = -\lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \quad , \quad i=1,\dots,n$$

یک اندیس i را طوری انتخاب می‌کنیم که برای همه‌ی jها داشته باشیم

$$|x_i| = 1 \geq |x_j| \qquad (\|x\|_\infty = |x_i|)$$

بنابراین

$$|\lambda||a_{ii}| = \left| -\lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

با حل این نامساوی برحسب $|\lambda|$، خواهیم داشت

$$|\lambda| \leq \frac{\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|} \qquad (1)$$

اما از غالب قطری سطری اکید بودن A داریم:

اکیداً غالب قطری

$$\boxed{1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \Longrightarrow 1 - \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| > \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|}$$

$$\Longrightarrow |a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| > \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \qquad (2)$$

از (1) و (2) داریم

$$|\lambda| < 1.$$

و چون λ مقدار ویژه‌ی دلخواهی از T_g بود، پس $\rho(T_g) < 1$. بنابراین روش گاوس سایدل به ازای هر $x^{(0)}$ انتخابی همگرا است. ▲

تبصره: شرط اکیداً غالب قطری سطری بودن ماتریس ضرایب در یک دستگاه یک شرط کافی برای همگرایی روشهای ژاکوبی و گاوس سایدل است و یک شرط لازم نیست؛ یعنی امکان دارد که در یک دستگاه ماتریس ضرایب غالب قطری اکید نباشد ولی برای آن روش ژاکوبی یا گاوس سایدل همگرا باشند.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال. نشان دهید روش گاوس-سایدل در مورد دستگاه خطی

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

برای هر بردار اولیه $x^{(0)}$ همگراست، در حالیکه روش ژاکوبی واگرا است. (توجه داریدکه ماتریس دستگاه قطر غالب اکید نیست).

(جواب تحلیلی $x=(1,1,1)^T$).

(7.4) Let $A = D + L + U$ be split into diagonal, lower, and upper parts. Let $T_J = -D^{-1}(L+U)$ denote the Jacobi iteration matrix, and $T_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ the Gauss-Seidel iteration matrix. Assume that D and $L+D$ are non-singular.

1. Show that λ is an eigenvalue of T_J if and only if $\det(\lambda D + L + U) = 0$.

2. Show λ is an eigenvalue of T_{GS} if and only if $\det(\lambda(D+L)+U) = 0$.

Use this to determine the spectral radius $\rho(T_{GS})$ for the Gauss-Seidel matrix associated to the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hint: Use the definition of eigenvalue as root of the characteristic polynomial, together with the fact that the determinant is multiplicative, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ for two matrices A and B.

Solution (7.4) First of all, note that since $\boldsymbol{D}$ and $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}$ are non-singular, we have

$$\det(\boldsymbol{D}) \neq 0, \quad \det(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}) \neq 0.$$

For the eigenvalues of the Jacobi matrix $\boldsymbol{T}_J = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})$ we get, using the multiplicativity of the determinant,

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{T}_J) = 0 &\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{D})\det(\lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{T}_J) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{D}(\lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{T}_J)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) = 0.
\end{aligned}$$

For the Gauss-Seidel matrix $\boldsymbol{T}_{GS} = -(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{U}$ we get

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{T}_{GS}) = 0 &\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})\det(\lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{T}_{GS}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det((\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})(\lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{T}_{GS})) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}) + (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{U}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{U}) = 0.
\end{aligned}$$

[redacted]

[redacted]

The matrix $\boldsymbol{A}$ is separated as

$$\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

and we need to compute the determinant of

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & -1 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Expanding along the first row gives

$$\det(\lambda(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}) + \boldsymbol{U}) = 2\lambda(4\lambda^2 - \lambda) + (-2\lambda^2) = 4\lambda^2(2\lambda - 1) = 0.$$

The non-zero eigenvalue is thus $\lambda = 1/2$ and $\rho(\boldsymbol{T}_{GS}) = 1/2$.

(8.1) For the matrices T corresponding to the Jacobi and Gauss-Seidel iteration in for solving the system

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5, \end{aligned}$$

determine the spectral radius $\rho(T)$. Which of the iterations converge?

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -5$$

$$T = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda^3 - 5\lambda/4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \pm\sqrt{5}\, i/2$$

$$\rho(T) = \sqrt{5}/2 > 1 \qquad \text{div.}$$

$$(L+D)X = -UX + b$$

$$T = -(L+D)^{-1} U$$

$$Tu = \lambda u \Rightarrow -Uu = (L+D)\lambda u$$

$$\Rightarrow (\lambda(L+D) + U)u = 0$$

دستگاه دارای جواب غیر بدیهی است if $|\lambda(L+D) + U| = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ -\lambda & -\lambda & 2\lambda \end{pmatrix} = 2\lambda(2\lambda+1)^2$$

$$\rho(T_g) = \max\{|0|, |-\tfrac{1}{2}|, |-\tfrac{1}{2}|\} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \rho(T_g) < 1$$

Conv.

قضیه. هرگاه به ازای نرم ماتریسی $\|T\|<1$، آنگاه دنباله‌ی $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ که با

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

تولید می‌شود، به ازای هر $x^{(0)}\in R^n$ به یک بردار $x\in R^n$ همگراست و کرانهای خطای زیر برقرارند:

$$\|x-x^{(k)}\| \le \|T\|^k \|x^{(0)}-x\|$$

&

$$\|x-x^{(k)}\| \le \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|} \|x^{(1)}-x^{(0)}\|.$$

اثبات. چون $\rho(T)\le\|T\|<1$ بنابراین بنا به قضیه p.82، دنباله‌ی $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ به یک بردار $x\in R^n$ با $x=Tx+c$ همگراست، و از آنجا که $x=Tx+c$ داریم

$$\begin{aligned}
x-x^{(k)} &= T(x-x^{(k-1)})\\
&= T^2(x-x^{(k-2)})\\
&\ \vdots\\
&= T^k(x-x^{(0)})
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|x-x^{(k)}\| \le \|T\|^k\|x-x^{(0)}\|.$$

کران اول خطا در قضیه بدست می‌آید. کران دوم خطا را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\forall n\ge 1:\quad x^{(n+1)}-x^{(n)} &= Tx^{(n)}-Tx^{(n-1)}\\
&= T(x^{(n)}-x^{(n-1)})\\
&= T(Tx^{(n-1)}-Tx^{(n-2)})\\
&= T^2(x^{(n-1)}-x^{(n-2)})\\
&= \cdots\\
&= T^n(x^{(1)}-x^{(0)})
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|x^{(n+1)}-x^{(n)}\| \le \|T\|^n\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

بنابراین به ازای $m>n\ge1$ داریم

$$\|x^{(m)}-x^{(n)}\| = \|x^{(m)}-x^{(m-1)}+x^{(m-1)}-\cdots+x^{(n+1)}-x^{(n)}\|$$

$$\le \|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|+\|x^{(m-1)}-x^{(m-2)}\|+\cdots+\|x^{(n+1)}-x^{(n)}\|$$

$$\le \|T\|^{m-1}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|+\|T\|^{m-2}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|+\cdots+\|T\|^{n}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

$$= \|T\|^{n}\left(1+\|T\|+\|T\|^{2}+\cdots+\|T\|^{m-n-1}\right)\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

و چون ثابت کردیم $x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ ، بنابراین با ثابت نگه داشتن n و میل دادن m به بی‌نهایت خواهیم داشت

$$\|x-x^{(n)}\| \overset{\text{نرم تابعی پیوسته}}{=} \lim_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x^{(n)}\| \le \|T\|^{n}\sum_{i=0}^{\infty}\|T\|^{i}\,\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

$$= \frac{\|T\|^{n}}{1-\|T\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|.$$

▲

تبصره: الگوی سرعت همگرایی با شعاع طیفی ماتریس تکرار T را می‌توان از کران خطای اول داده شده در قضیه اخیر ملاحظه کرد. چون این کران به ازای هر نرم ماتریسی طبیعی برقرار است (نرم ماتریسی طبیعی به ازای هر ε) و چون داریم که $\|A\| < \rho(A)+\varepsilon$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\|x^{(k)}-x\| \simeq \rho(T)^{k}\|x^{(0)}-x\| \qquad (*)$$

فرض کنیم $\rho(T)<1$ و اکید برقرار است. $x^{(0)}=0$ در یک روش تکراری جهت تقریب جواب x با حداکثر خطای نسبی 10^{-t} بکار رود. بنا به $(*)$، بعد از k تکرار خطای نسبی تقریباً $\rho(T)^{k}$ است، لذا اگر $\rho(T)^{k}\le 10^{-t}$ ؛

$$k \ge \frac{t}{-\log_{10}\rho(T)}$$

دقت 10^{-t} انتظار می‌رود.

مسأله. فرض کنیم ماتریس A به صورت $A=B-C$ داده شده است که در آن A، B و C ناتکین هستند. همچنین $BX^{(m)} = CX^{(m-1)} + Y$، $m=1,2,\cdots$، مفروض است. شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim\limits_{m\to\infty} X^{(m)} = A^{-1}Y$ چیست؟

حل. چون B ناتکین است، داریم

$$X^{(m)} = B^{-1}CX^{(m-1)} + B^{-1}Y$$

فرض کنیم $B^{-1}C = H$ و $B^{-1}Y = d$، در این صورت

$$m=1: \quad X^{(1)} = HX^{(0)} + d$$

$$\begin{aligned} m=2: \quad X^{(2)} &= HX^{(1)} + d \\ &= H(HX^{(0)} + d) + d \\ &= H^2X^{(0)} + (H+I)d \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$X^{(m)} = H^m X^{(0)} + (H^{m-1} + H^{m-2} + \cdots + I)d$$

حال اگر

$$\|H\| = \|B^{-1}C\| < 1 \qquad (*)$$

در این صورت

($\|H\|<1 \Rightarrow (I-H)^{-1}$ موجود و برابر $\sum_{i=0}^{\infty} H^i$ است)

سؤال درس: هرگاه برای ماتریس A، $\|A\|<1$.

$$\|B^{-1}C\| < 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} (B^{-1}C)^m = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} X^{(m)} = (I + H + H^2 + \cdots)d = (I-H)^{-1}d$$

$$\begin{aligned} &= (I - B^{-1}C)^{-1}d \\ &= (B^{-1}(B-C))^{-1}d \\ &= (B^{-1}A)^{-1}d \\ &= A^{-1}Bd \\ &= A^{-1}Y \end{aligned}$$

بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim\limits_{m\to\infty} X^{(m)} = A^{-1}Y$ این است که

$$\|B^{-1}C\| < 1.$$

سرعت همگرایی یک روند به شعاع طیفی ماتریس مربوط به آن وابسته است، لذا یک راه انتخاب روندی که منجر به همگرایی سریع شود انتخاب روشی است که ماتریس مربوط به آن کوچکترین شعاع طیفی را داشته باشد.

در حالت کلی معلوم نیست که کدام یک از دو تکنیک ژاکوبی یا گاوس-سایدل باید بکار رود. بجز در حالت خاص زیر که جواب معلوم است.

Thm. (Stein-Rosenberg)

If $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$, then

(i) $0 < \rho(T_g) < \rho(T_j) < 1$;

(ii) $1 < \rho(T_j) < \rho(T_g)$;

(iii) $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 0$;

(iv) $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 1$.

لذا وقتی یک روش همگرا باشد، هر دو همگرا هستند و روش گاوس-سایدل سریع‌تر از روش ژاکوبی است.

روش ریچاردسون: می‌توانیم $Ax=b$ را به صورت

$$x = x - Ax + b = (I-A)x + b$$

بنویسیم. روش تکراری

$$x^{(k+1)} = (I-A)x^{(k)} + b \quad , k=0,1,2,\dots$$

$$= x^{(k)} + r^{(k)} \quad , \text{باقیمانده } r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

روش ریچاردسون نامیده می‌شود. بنابراین، این روش همگراست اگر و فقط اگر $\|I-A\| < 1$ (یا اگر و فقط اگر $\rho(I-A)<1$).

مسئله: اگر در دستگاه $Ax=b$، A دارای ویژگی اکیداً غالب قطری سطری و احد باشد،

$$a_{ii} = 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (*)$$

آن‌گاه روش ریچاردسون همگراست (برای هر $x^{(0)}$ ابتدایی).

حل: داریم

عناصر قطری ماتریس $I-A$ صفراست

$$\|I-A\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \overset{(*)}{<} 1 \implies \|I-A\|_\infty < 1$$

$$\implies \rho(I-A) < 1 \implies$$ برای هر $x^{(0)}$، روش ریچاردسون همگراست

قضیه: روش ریچاردسون همگراست اگر و فقط اگر

$$\frac{2\operatorname{Re}\lambda_i}{|\lambda_i|^2} > 1 \ , \quad i=1,2,\dots,n$$

که $\lambda_i \in \mathbb{C}$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

اثبات: ماتریس تکرار روش ریچاردسون $T = I-A$ است و می‌دانیم اگر λ_i مقدار ویژه‌ی A باشد، $1-\lambda_i$ نیز مقدار ویژه‌ی T است، چون:

$$0 = \det(A-\lambda_i I) = (-1)^n \det(-A+\lambda_i I) = (-1)^n \det(I-A-I+\lambda_i I) = (-1)^n \det((I-A)-(1-\lambda_i)I)$$

$$\implies \det((I-A)-(1-\lambda_i)I) = 0 \implies$$ $1-\lambda_i$ مقدار ویژه‌ی $I-A$ است

بنابراین روش ریچاردسون همگراست اگر و فقط اگر $\forall i, |1-\lambda_i| < 1$ (بنابر قضیه 82)، یعنی

$$\forall i: |1-\lambda_i|^2 < 1 \iff \cancel{1} - 2\operatorname{Re}(\lambda_i) + |\lambda_i|^2 < \cancel{1}$$

$$\iff \frac{2\operatorname{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|^2} > 1 \ , \quad i=1,\dots,n$$

روش تکراری JOR :

تعمیمی از روش ژاکوبی، روش JOR (Over Relaxation) است که شامل یک پارامتر ω است و به صورت زیر است:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)\, x_i^{(k)}, \quad i=1,\dots,n \qquad (*)$$

ماتریس تکرار متناظر آن عبارت است از

$$T_{J_\omega} = \omega T_J + (1-\omega) I$$

که در آن T_J ماتریس تکرار روش ژاکوبی است.

اگر فرم برداری این روش را بخواهیم بنویسیم، از $(*)$ و با توجه به اینکه $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$، می‌توان نوشت:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)\, x_i^{(k)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} a_{ii}\, x_i^{(k)}$$

$$= \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) + x_i^{(k)}$$

$$\Longrightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)}.$$

روش مذکور برای هر $\omega \neq 0$ سازگار است و برای $\omega = 1$، با روش ژاکوبی یکسان است.

قضیه. اگر روش ژاکوبی همگرا باشد، آن گاه روش JOR همگراست اگر $0 < \omega \le 1$.

اثبات. با توجه به اینکه روش JOR دارای ماتریس تکرار $T_{J_\omega} = \omega T_J + (1-\omega) I$ است بنابراین اگر λ_k مقادیر ویژه T_J باشند، در این صورت مقادیر ویژه T_{J_ω} به صورت $\mu_k = \omega\lambda_k + (1-\omega)$، $1 \le k \le n$، می‌باشند زیرا

$$0 = \det(T_J - \lambda_k I) = \omega^{-n} \det\Big(\big(\omega T_J + (1-\omega) I\big) - \big(\omega\lambda_k + (1-\omega)\big) I\Big)$$

بنا به فرمول اویلر برای نمایش اعداد مختلط، فرض کنیم $\lambda_k = r_k e^{i\theta_k}$ و چون بنا به فرض روش ژاکوبی همگراست، بنابراین $|\lambda_k| = |r_k| < 1$. حال داریم

$$\mu_k \bar{\mu}_k = (\omega\lambda_k + (1-\omega))(\omega\bar{\lambda}_k + (1-\omega)) = \omega^2 |\lambda_k|^2 + \underbrace{\omega(1-\omega)\lambda_k + \omega(1-\omega)\bar{\lambda}_k}_{=2\omega(1-\omega)\operatorname{Re}\lambda_k} + (1-\omega)^2$$

$$|\mu_k|^2 = \omega^2 r_k^2 + 2\omega r_k \overset{\le 1}{\cos\theta_k}\,(1-\omega) + (1-\omega)^2 \le \big(\omega r_k + (1-\omega)\big)^2 = \big(\omega(r_k - 1) + 1\big)^2$$

حال اگر $0 < \omega \le 1$، در این صورت

$$\omega(r_k - 1) \le r_k - 1 \Rightarrow \omega(r_k - 1) + 1 \le r_k - 1 + 1 = r_k < 1 \Rightarrow |\mu_k| < 1.$$

بنابراین با فرض همگرایی روش ژاکوبی و $0 < \omega \le 1$، روش JOR نیز همگرا خواهد بود. ▲

روش SOR:

تعمیمی از روش گاوس سایدل، روش SOR (Successive over-relaxation) است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum a_{ij} x_j^{(k)}\right) + (1-\omega) x_i^{(k)} \quad , \quad i=1,\dots,n \qquad (*)$$

روش $(*)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(I+\omega D^{-1}E)\,x^{(k+1)} = \left((1-\omega)I - \omega D^{-1}F\right)x^{(k)} + \omega D^{-1}b \qquad (i)\ (A = \underset{\text{قطری}}{D} + \underset{\text{پایین‌مثلثی اکید}}{E} + \underset{\text{بالامثلثی اکید}}{F})$$

ماتریس تکرار SOR به صورت زیر است: $T(\omega) = (I+\omega D^{-1}E)^{-1}\left((1-\omega)I - \omega D^{-1}F\right)$

اگر (i) را در D ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$(D+\omega E)\,x^{(k+1)} = \left((1-\omega)D - \omega F\right)x^{(k)} + \omega b$$

$$\xrightarrow{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{\omega}D + E\right)x^{(k+1)} = \left[\frac{1}{\omega}D - (D+F)\right]x^{(k)} + b$$

$$= \left(\frac{1}{\omega}D + E - \overset{A=D+E+F}{A}\right)x^{(k)} + b$$

$$= \left(\frac{1}{\omega}D + E\right)x^{(k)} + r^{(k)} \qquad \left(r^{(k)} = b - Ax^{(k)}\right)$$

فرم دیگر SOR:

$$\Longrightarrow \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D + E\right)^{-1} r^{(k)}$$

روش SOR برای هر $\omega \neq 0$ سازگار است و برای $\omega = 1$ با روش گاوس سایدل یکسان است.

اگر $\omega \in (0,1)$ روش under-relaxation و برای $\omega > 1$: روش over-relaxation نامیده می‌شود.

قضیه. برای هر $\omega \in \mathbb{R}$، داریم $\rho(T(\omega)) \geq |\omega - 1|$؛ بنابراین روش SOR همگرا نخواهد بود اگر $\omega \leq 0$ یا $\omega \geq 2$.

اثبات. داریم

$$T(\omega) = (I + \omega D^{-1}E)^{-1}\left((1-\omega)I - \omega D^{-1}F\right)$$

پایین‌مثلثی اکید — پایین‌مثلثی اکید — پس پایین‌مثلثی با عناصر قطری 1

بالامثلثی اکید — پس بالامثلثی اکید — پس بالامثلثی عناصر قطری $1-\omega$.

فرض کنیم $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی $T(\omega)$ باشند، در این صورت داریم:

$$\left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right| = \left|\det(T(\omega))\right| = \left|\det(\underbrace{I+\omega D^{-1}E}_{\text{پایین‌مثلثی با عناصر قطری 1}})^{-1} \cdot \det(\underbrace{(1-\omega)I - \omega D^{-1}F}_{\text{بالامثلثی با عناصر قطری } 1-\omega})\right| = |1-\omega|^n.$$

بنابراین حداقل λ_kای $1 \leq k \leq n$، وجود دارد که $|\lambda_k| \geq |1-\omega|$. حال اگر $|1-\omega| \geq 1$ ($\omega \leq 0$ یا $\omega \geq 2$) در این صورت $|\lambda_k| \geq 1$ و لذا $\rho(T(\omega)) \geq 1$، که در این صورت SOR همگرا نخواهد بود. ▲

قضیه. هرگاه A یک ماتریس معین مثبت بوده و $0<\omega<2$. آن گاه روش SOR برای هر انتخاب بردار جواب تقریبی اولیه $x^{(0)}$ همگرا است.

قضیه. هرگاه A معین مثبت و سه قطری باشد آن گاه $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$، و بهترین انتخاب ω برای روش SOR عبارت است از

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_j)^2}}$$

و با این انتخاب ω داریم $\rho(T_\omega)=\omega-1$.

مثال. اگر $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ آن گاه بهترین انتخاب ω در روش SOR را بدست آورید.

$$T_j = D^{-1}(L+U)$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(T_j-\lambda I) = -\lambda(\lambda^2-0.625)=0 \Rightarrow \lambda=0,\ \lambda=\pm\sqrt{0.625}$$

$$\Rightarrow \rho(T_j)=\sqrt{0.625}$$

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-0.625}} \approx 1.24$$

فصل چهارم: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

محاسبه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسها یکی از مباحث اصلی در جبر خطی است. در بعضی مسائل همه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مورد نیاز است، و در برخی یک یا چند مقدار ویژه، برای مثال بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه (از لحاظ قدر مطلق) و بردارهای ویژه‌ی نظیر لازم است. در این فصل روشهایی را جهت تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه بررسی می‌کنیم. مقادیر ویژه در بسیاری از کاربردها از جمله، مطالعه‌ی ارتعاشات سیستمهای دینامیکی و سازه‌ای، تحلیل پایداری طرحهای عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی نقش دارند.

محاسبه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد و λ یک اسکالر (یک عدد مختلط) باشد. اگر معادله‌ی

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

یک جواب غیربدیهی (یعنی $x \neq 0$) داشته باشد، آنگاه λ یک مقدار ویژه‌ی A است، بردار مخالف صفر x که در معادله‌ی (1) صدق می‌کند، یک بردار ویژه‌ی A متناظر با مقدار ویژه‌ی λ است. برای مثال معادله‌ی

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

بیان می‌کند که -2 یک مقدار ویژه‌ی ماتریس 3×3 داده شده و $(1,3,-4)^T$ یک بردار ویژه‌ی متناظر آن است. توجه کنید که هر مضرب مخالف صفر یک بردار ویژه، یک بردار ویژه‌ی دیگر متناظر با همان مقدار ویژه است.

هرگاه اکنون معادلهی (1) دارای یک جواب غیربدیهی باشد، معادل با هریک از شرطهای زیر است:

(2) $A-\lambda I$ بردار مخالف صفری را به صفر می‌نگارد؛

(3) $A-\lambda I$ تکین است؛

(4) $\det(A-\lambda I)=0$؛ این معادله به معادلهی مشخصهی A معروف است.

یادآوری از جبر خطی مقدماتی:

تعریف. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V باشد. گوییم T قطری شدنی است هرگاه پایه‌ای برای V وجود داشته باشد که هر بردار آن یک بردار ویژه برای T باشد.

(این که T قطری شدنی است، بدین معنی است که ماتریس متناظر با T، با ماتریس قطری D متشابه است.)

یا به عبارت دیگر، T قطری شدنی است هرگاه بردارهای ویژهی T فضای V را تولید کنند.

- فرض کنید T (عملگر خطی نظیر به ماتریس A) قطری شدنی باشد، در این صورت اگر تعداد دفعاتی که λ_i به عنوان ریشه $\det(A-\lambda I)=0$ ظاهر می‌شود، برابر d_i باشد، در این صورت d_i برابر با بعد فضای بردارهای ویژهی نظیر به مقدار ویژهی λ_i است.

53

مثال. با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، مشخص دهید ماتریس A قطری شدنی است یا نه.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

حل. مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از:

$$\lambda_1=\lambda_2=2\ ;\quad \lambda_3=5.$$

بردارهای ویژه‌ی متناظر با $\lambda_1=\lambda_2=2$ را حل می‌کنیم:

$$(A-2I)x=0 \Longrightarrow \begin{cases} x_2+2x_3=0 \\ 3x_3=0 \\ 3x_3=0 \end{cases} \xrightarrow[\lambda_1=\lambda_2=2 \text{ مقدار ویژه‌ی}]{\text{بردارهای ویژه‌ی نظیر به}} = \{(\alpha,0,0)^T \mid \alpha \text{ اسکالر مخالف صفر}\}$$

بردارهای ویژه‌ی متناظر با $\lambda_3=5$:

$$(A-5I)x=0 \Longrightarrow \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0 \Longrightarrow x_1=\dfrac{x_2+2x_3}{3} \\ -3x_2+3x_3=0 \Longrightarrow x_2=x_3 \\ 0=0 \end{cases} \xrightarrow[\lambda_3=5 \text{ ویژه‌ی}]{\text{بردارهای ویژه‌ی نظیر به مقدار}} = \{(\beta,\beta,\beta)^T \mid \beta \text{ اسکالر}, \beta\neq 0\}$$

بنابراین بعد فضای ویژه‌ی متناظر به مقدار ویژه‌ی $\lambda_1=\lambda_2=2$ با چندگانگی دو برابر یک است (بنابراین فضاهای ویژه‌ی نظیر به مقدارهای ویژه در مجموع 2 است لذا $V=R^3$ را تولید نمی‌کند) لذا ماتریس A قطری شدنی نیست.

یعنی: $\nexists\ \underset{\text{نامنفرد}}{P} :\ P^{-1}AP=\underset{\text{قطری}}{D}$

تبصره:

مقادیر ویژه‌ی ماتریس A با پیدا کردن n ریشه‌ی $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ بدست می‌آیند، و در هر حالت دیدیم که تعیین ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی nام، جز برای مقادیر کوچک n، مشکل است. لذا لازم است تکنیک‌های تقریبی برای پیدا کردن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس ساخته شود. قضیه‌ی زیر حدود مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس را بدست می‌دهد.

قضیه (قضیه‌ی دوایر گرشگورین): فرض کنید $A=(a_{ij})$ یک ماتریس $n\times n$ و R_i نمایشگر دایره‌ای در صفحه‌ی مختلط به مرکز a_{ii} و شعاع $r_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ باشد. آنگاه مقادیر ویژه‌ی A در مجموعه‌ی $R=\bigcup_{i=1}^{n}R_i$ قرار دارند و اجتماع هر k تا از این دوایر که $n-k$ تای دیگر را قطع نکند دقیقاً شامل k مقدار ویژه است.

اثبات. فرض کنید λ یک مقدار ویژه‌ی A و x با مولفه‌های x_i، $1\le i\le n$، بردار ویژه‌ی متناظر با آن باشد. داریم

$$Ax=\lambda x$$

یا برحسب مولفه‌ها،

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i\ ,\quad i=1,\dots,n \qquad (*)$$

فرض کنید k عددی صحیح باشد که $1\le k\le n$ به طوری که

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|=|x_k|$$

در این صورت در رابطه‌ی $(*)$ به ازای $i=k$ خواهیم داشت

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j=\lambda x_k.$$

بنابراین

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{kj}x_j=\lambda x_k-a_{kk}x_k=(\lambda-a_{kk})x_k$$

در نتیجه

$$|(\lambda-a_{kk})x_k|=\Big|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{kj}x_j\Big|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|a_{kj}||x_j|$$

$$\Longrightarrow|\lambda-a_{kk}|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|a_{kj}|\frac{|x_j|}{|x_k|}$$

$$\le\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|a_{kj}|$$

که نشان می‌دهد $\lambda\in R_k$؛ و بنابراین $\lambda\in\bigcup_{i=1}^{n}R_i$. اثبات قسمت دوم به استفاده‌ی پیچیده‌ای از پیوستگی نیاز دارد و اینجا ارائه نمی‌شود.

تبصره: در قضیه‌ی گرشگورین ثابت شد که

مجموعه مقادیر ویژه‌ی A

$$\forall \lambda \in \sigma(A): \quad \lambda \in R=\bigcup_{i=1}^{n} R_i \quad ; \quad R_i=\left\{z\in\mathbb{C} : |z-a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\right\}$$

$$(\sigma(A)\subseteq R)$$

با اعمال این قضیه به ماتریس A^T و توجه به اینکه A و A^T مقادیر ویژه‌ی یکسانی دارند، می‌توان نوشت:

$$\forall \lambda \in \sigma(A): \quad \lambda \in C=\bigcup_{j=1}^{n} C_j \quad ; \quad C_j=\left\{z\in\mathbb{C} : |z-a_{jj}| \le \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|\right\}$$

دوایر R_i در صفحه‌ی مختلط، دوایر سطری، و C_jها دوایر ستونی نامیده می‌شوند.

با توجه به این مطلب می‌توان قضیه‌ی زیر را نوشت:

قضیه (قضیه‌ی گرشگورین): فرض کنید $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$؛ آنگاه

$$\forall \lambda \in \sigma(A) ; \quad \lambda \in R\cap C.$$

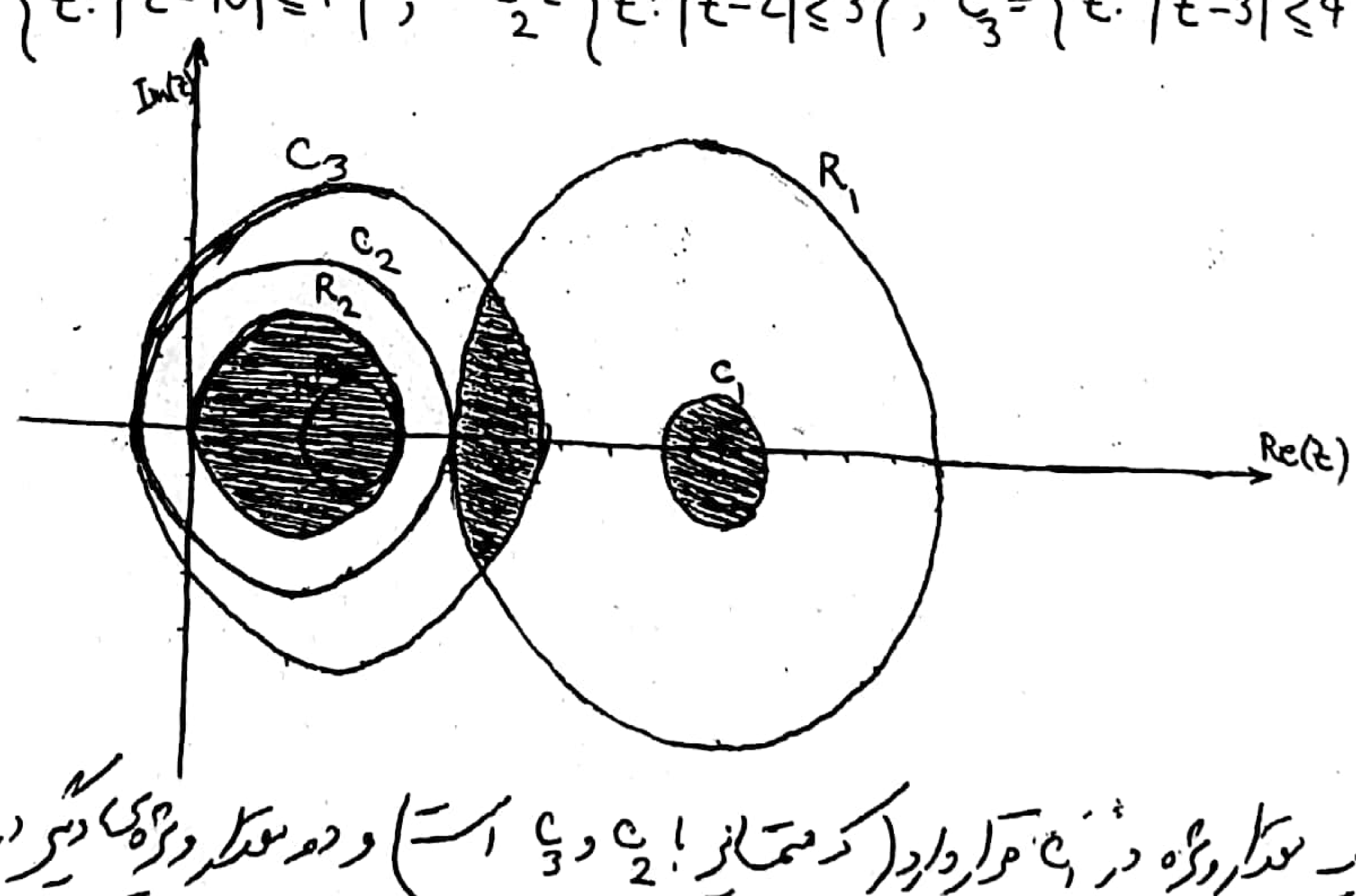
مثال. ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی A برابر $\sigma(A)=\{9.687, 2.656\pm 0.693i\}$ (تا چهار رقم با معنا) است. دوایر سطری و ستونی به صورت زیرند:

$$R_1=\{z: |z-10|\le 5\} ; \quad R_2=\{z: |z-2|\le 2\} ; \quad R_3=\{z: |z-3|\le 1\} ;$$

$$C_1=\{z: |z-10|\le 1\} ; \quad C_2=\{z: |z-2|\le 3\} ; \quad C_3=\{z: |z-3|\le 4\}.$$



توجه می‌کنیم که یک مقدار ویژه در C_1 قرار دارد (که متمایز با C_2 و C_3 است) و دو مقدار ویژه‌ی دیگر در $R_2\cup\{C_3\cap R_1\}$ قرار دارد. همچنین دو مقدار ویژه در $R_2=R_2\cup R_3$ قرار دارند (چون این دو دایره، دایره‌ی دیگر یعنی R_1 را قطع نمی‌کنند). بنابراین مقادیر ویژه در C_1 (یک مقدار ویژه) و در R_2 (دو مقدار ویژه‌ها) قرار دارند.

$$(R_1 \cup R_2 \cup R_3) \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3) = (R_1 \cup R_2) \cap (C_1 \cup C_3)$$

$$= [R_1 \cap (C_1 \cup C_3)] \cup [R_2 \cap (C_1 \cup C_3)]$$

مسئله: با استفاده از قضیه‌ی گرشگورین ثابت کنید که یک ماتریس غالب قطری اکید (سطری)، مقدار ویژه‌ی صفر ندارد و در نتیجه ناتکین است.

حل: فرض کنیم A ماتریسی اکیداً غالب قطری سطری باشد (اگر غالب قطری اکید ستونی باشد، اثبات زیر برای A^T که غالب قطری اکید سطری است، درست خواهد بود و در نتیجه برای A نیز نتیجه برقرار خواهد بود). بنابراین به ازای هر $i=1,\dots,n$ داریم

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \Longrightarrow \underset{a_{ii}\neq 0}{} \begin{cases} a_{ii}>0: & a_{ii} - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| > 0 \qquad (*) \\ a_{ii}<0: & -a_{ii} > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \Rightarrow a_{ii} + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| < 0 \qquad (**) \end{cases}$$

از طرفی اگر λ مقدار ویژه‌ی دلخواه A باشد، بنا به قضیه‌ی گرشگورین داریم:

$$\forall i: \quad |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$$

$$\Longrightarrow \forall i: \quad a_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \overset{(1)}{\leq} \lambda \overset{(2)}{\leq} a_{ii} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$$

$$\Longrightarrow \forall i: \begin{cases} a_{ii}>0 \xrightarrow{\text{بنا به } (*) \text{ و } (1)} \lambda>0 \\ \text{یا} \\ a_{ii}<0 \xrightarrow{\text{بنا به } (**) \text{ و } (2)} \lambda<0 \end{cases}$$

بنابراین در هر حال $\lambda\neq 0$ و چون λ مقدار ویژه‌ی دلخواه A بود، نتیجه می‌شود A مقدار ویژه‌ی صفر ندارد. از طرفی، چون

$$\det(A) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}\lambda_i \qquad (\lambda_i \text{ ها مقادیر ویژه‌ی } A)$$

پس $\det A\neq 0$ و در نتیجه A ناتکین است.

$$P_\lambda(A) = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n\det(A)$$

$$P_0(A) = \det(A) = (0-\lambda_1)\dots(0-\lambda_n) = (-1)^n \prod \lambda_i$$

مسئله: یک کران بالا و یک کران پایین برای $\rho(A)$ با استفاده از $\|A\|_1$ بیابید که در آن $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ و سپس این کار را با استفاده از قضیه‌ی گرشگورین تکرار کنید.

حل: داریم $0\leq\rho(A)\leq\|A\|_1$ و $\|A\|_1=\max\{2,4,4\}=4$، پس $0\leq\rho(A)\leq 4$. از طرفی بنا به گرشگورین، اگر $\lambda\in\sigma(A)$ باشد، داریم:

$\lambda\in\cup R_i$; $R_1=\{z: \underbrace{|z-1|\leq 1}_{0\leq z\leq 2}\}$; $R_2=\{z: \underbrace{|z-4|\leq 1}_{3\leq z\leq 5}\}$; $R_3=\{z: \underbrace{|z-3|=0}_{z=3}\}$ $\Rightarrow \cup R_i=\{z: 0\leq|z|\leq 5\}$

چون $\lambda\in\cup R_i$ بنابراین $0\leq|\lambda|\leq 5$ و لذا

$$0\leq\rho(A)\leq 5.$$

تعریف. ماتریسهای مربعی از مرتبه‌ی n، A و B را متشابه گوئیم هرگاه ماتریس ناتکین P وجود داشته باشد بطوریکه

$$A = P^{-1}BP$$

یا بطور معادل

$$A = PBP^{-1}.$$

قضیه. فرض کنید ماتریسهای مربعی از مرتبه‌ی n، A و B متشابه باشند و λ یک مقدار ویژه‌ی A و x بردار ویژه‌ی نظیر به آن باشد. در این صورت λ یک مقدار ویژه‌ی B است و اگر $A=PBP^{-1}$، آنگاه Px بردار ویژه‌ی نظیر λ برای ماتریس B است.

اثبات. فرض کنیم ماتریسهای مربعی A و B (از مرتبه‌ی n) متشابه باشند و

$$A = PBP^{-1}.$$

همچنین فرض کنیم λ یک مقدار ویژه‌ی A و x بردار ویژه‌ی نظیر باشد، داریم

$$Ax=\lambda x \Longrightarrow PAx = \lambda Px$$

قرار می‌دهیم $y=Px$، بنابراین $x=P^{-1}y$، پس داریم

$$PAP^{-1}y=\lambda y \Longrightarrow By=\lambda y$$

که نشان می‌دهد λ یک مقدار ویژه‌ی B و $y=Px$ بردار ویژه‌ی نظیر است. ▲

قضیه. مقادیر ویژه‌ی ماتریسهای هرمیتی، حقیقی‌اند.

اثبات. فرض کنید A ماتریسی هرمیتی $(A=A^H)$ و λ مقدار ویژه‌ی آن و x بردار ویژه‌ی نظیر باشد، داریم

$$\bar{\lambda}(x,x) \overset{!}{=} \bar{\lambda}\,\overline{(x,x)} = \overline{\lambda(x,x)} \overset{!}{=} \overline{(\lambda x,x)} \overset{!}{=} \overline{(Ax,x)} \overset{!}{=} (x,Ax) \overset{!}{=} (A^H x,x) \overset{!}{=} (Ax,x) = (\lambda x,x) = \lambda(x,x)$$

$(x,x)=\|x\|^2$ حقیقی است — خاصیت ضرب داخلی $\alpha(x,x)=(\alpha x,x)$ — مقدار ویژه — $(x,y)=\overline{(y,x)}$ — در داخل — A هرمیتی

و چون $x\neq 0$ (چون x بردار ویژه است) بنابراین $(x,x)\neq 0$ و لذا بایستی داشته باشیم

$$\lambda=\bar{\lambda} \Longrightarrow \lambda\in\mathbb{R}. \blacktriangle$$

قضیه. اگر A حقیقی و متقارن باشد، مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی‌اند.

اثبات. اگر A حقیقی و متقارن باشد، پس هرمیتی است و بنابه قضیه‌ی فوق مقادیر ویژه‌اش حقیقی‌اند.

تعریف. دو بردار u و v را متعامد گوئیم هرگاه

$$(u, v) = 0.$$

قضیه. در ماتریسهای هرمیتی، بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز متعامدند.

اثبات. فرض کنیم A ماتریس هرمیتی و x_1 و x_2 بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی λ_1 و λ_2 ماتریس A $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ باشند. داریم

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad \& \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

بنابر خواص ضرب داخلی داریم:

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2) \qquad (1)$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \bar{\lambda}_2 (x_1, x_2) \overset{\substack{\lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \text{هرمیتی است } A}}{=} \lambda_2 (x_1, x_2) \qquad (2)$$

همچنین

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, A^H x_2) \overset{\text{هرمیتی}}{=} (x_1, Ax_2) \qquad (3)$$

از (1) و (2) و (3) خواهیم داشت

$$\lambda_1 (x_1, x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2) \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \xrightarrow{\lambda_1 \neq \lambda_2} (x_1, x_2) = 0.$$

بنابراین، بردارهای ویژه‌ی نظیر به مقادیر ویژه‌ی متمایز در ماتریسهای هرمیتی متعامدند. ▲

قضیه. بردارهای ویژه‌ی $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک ماتریس A متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مستقل خطی‌اند.

اثبات: (صفحه بعد)

اثبات: (برهان خلف) فرض کنید مقادیر ویژه‌ی A متمایز و بردارهای ویژه‌ی آن مستقل خطی نباشند.

چون بردار ویژه بنا به تعریف صفر نیست، پس $\{x_1\}$ مستقل خطی است. فرض کنید r بزرگترین عدد صحیح مثبتی باشد

به طوری که $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ مستقل خطی باشد. در این صورت طبق مطالب فوق $1 \le r < n$ و همچنین $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$

وابسته‌ی خطی است. بنابراین

$$\exists c_1, c_2, \dots, c_{r+1} : \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_rx_r + c_{r+1}x_{r+1} = 0 \ ^{(*)} \quad \& \quad \sum_{i=1}^{r+1} |c_i| \neq 0 \ ^{(**)}$$

با ضرب $(*)$ در A خواهیم داشت

$$c_1Ax_1 + c_2Ax_2 + \dots + c_rAx_r + c_{r+1}Ax_{r+1} = 0$$

$$\Longrightarrow c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 + \dots + c_r\lambda_rx_r + c_{r+1}\lambda_{r+1}x_{r+1} = 0 \qquad (1)$$

همچنین $(*)$ را در λ_{r+1} ضرب می‌کنیم:

$$c_1\lambda_{r+1}x_1 + c_2\lambda_{r+1}x_2 + \dots + c_r\lambda_{r+1}x_r + c_{r+1}\lambda_{r+1}x_{r+1} = 0 \qquad (2)$$

با کم کردن (2) از (1)، خواهیم داشت

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})x_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})x_2 + \dots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})x_r = 0 \qquad (3)$$

از آنجا که فرض کردیم $\{x_1, \dots, x_r\}$ مستقل خطی است، از (3) نتیجه می‌شود:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = \dots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0 \qquad (4)$$

و چون مقادیر ویژه متمایزند، بنابراین برای هر $1 \le i \le r$، $\lambda_i - \lambda_{r+1} \neq 0$، و از (4) نتیجه می‌شود:

$$c_1 = \dots = c_r = 0 \qquad (5)$$

از (5) و $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$c_{r+1}x_{r+1} = 0$$

و چون x_{r+1} بردار ویژه و در نتیجه مخالف صفر است، داریم

$$c_{r+1} = 0$$

که این متناقض با $(**)$ است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است ▲

56

تذکر: بنا به قضیه‌ی قبل، اگر مقادیر ویژه‌ی A از مرتبه‌ی n متمایز باشند، n بردار ویژه‌ی مستقل خطی خواهیم داشت. لذا بردارهای ویژه یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ (یا $\mathbb{C}^n$) خواهند بود و در نتیجه طبق تعریف A قطری‌شدنی است. یعنی اگر مقادیر ویژه‌ی ماتریس A متمایز باشند، A قطری‌شدنی است. دقت شود که متمایز بودن مقادیر ویژه‌ی A برای قطری شدن A شرط کافی است نه لازم.

قضیه. فرض کنید A و P ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی n باشند و $\det(P)\neq 0$. در این صورت $P^{-1}AP$ یک ماتریس قطری به صورت

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}=\Delta$$

است که λ_iها مقادیر ویژه‌ی A هستند که متمایزند اگر و تنها اگر ستون iام P، بردار ویژه‌ی A متناظر با مقدار ویژه‌ی λ_i باشد.

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنید $P=(p_{ij})$ و ستون‌های P به صورت $P=[P_1,P_2,\dots,P_n]$ باشند و P_i بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ_i باشد. چون λ_iها متمایزند، بنا به قضیه‌ی قبل P_iها مستقل خطی‌اند بنابراین $\det(P)\neq 0$ و لذا P^{-1} موجود است. داریم

$$\begin{aligned}AP&=[AP_1\ \ AP_2\ \cdots\ AP_n]\\&=[\lambda_1P_1\ \ \lambda_2P_2\ \cdots\ \lambda P_n]\\&=[P_1\ \ P_2\ \cdots\ P_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\ddots\ \lambda_n\end{bmatrix}\\&=P\Delta\\&\Longrightarrow P^{-1}AP=\Delta\end{aligned}$$

و این قسمت اول قضیه را ثابت می‌کند.

($\Rightarrow$): فرض کنید $P^{-1}AP=\Delta$ که Δ قطری و درایه‌های آن λ_iها باشند. از $P^{-1}AP=\Delta$ نتیجه می‌شود $AP=P\Delta$ و برحسب ستون‌های ماتریس‌های دو طرف داریم

$$[AP_1\ \ AP_2\ \cdots\ AP_n]=AP=P\Delta=[\lambda_1P_1\ \ \lambda_2P_2\ \cdots\ \lambda_nP_n]\Longrightarrow AP_i=\lambda_iP_i\ ,\ 1\le i\le n$$

که نشان می‌دهد P_i بردار ویژه‌ی متناظر با λ_i است. و اثبات تمام است.

تجزیه‌ی شور:

این مطلب که "مقادیر ویژه‌ی ماتریسهای مشابه برابرند" پیشنهاد می‌کند: A را با یک تبدیل مشابه به ماتریس B تبدیل کنید، $B=P^{-1}AP$، و مقادیر ویژه‌ی B را محاسبه کنید. اگر B ساده‌تر از A باشد، محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌اش ممکن است ساده‌تر باشد. مخصوصاً اگر B مثلثی باشد، آنگاه مقادیر ویژه‌ی B (و مقادیر ویژه‌ی A) بطور ساده عناصر قطری B هستند. این حقایق ما را بطور طبیعی به قضیه‌ی مهم شور رهنمون می‌کند، که بر طبق آن این کار همیشه ممکن است.

لم ۱. ماتریس $I-vv^H$ یکانی است اگر و تنها اگر $\|v\|_2^2=2$ یا $v=0$.

اثبات. برای اینکه ماتریس $U=I-vv^H$ یکانی باشد، باید داشته باشیم

$$I=UU^H$$
$$=(I-vv^H)(I-vv^H)=I-2vv^H+v\overbrace{v^Hv}^{\text{عددی است (اسکالر)}}v^H=I-2vv^H+(v^Hv)(vv^H)$$
$$=I-(2-v^Hv)vv^H$$

و رابطه‌ی فوق برقرار است اگر و فقط اگر $v^Hv=2$ $(\|v\|_2^2=2)$ یا $vv^H=0$ $(v=0)$.

لم 2. فرض کنید x و y دو بردار باشند به قسمی که $\|x\|_2=\|y\|_2$ و (x,y) عددی حقیقی باشد. آنگاه یک ماتریس یکانی U به شکل $I-vv^H$ وجود دارد به طوری که $Ux=y$.

اثبات. اگر $x=y$، قرار دهید $v=0$. اگر $x\neq y$، قرار دهید $v=\alpha(x-y)$ با $\overbrace{\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\|x-y\|_2}}^{\text{با این شرایط } \|v\|_2^2=2 \text{ که بنابراین } U=I-vv^H \text{ یکانی است.}}$. با این انتخاب داریم

$$Ux-y=(I-vv^H)x-y=x-vv^Hx-y=x-y-\alpha^2(x-y)(x^H-y^H)x$$
$$=(x-y)\left(1-\alpha^2(x^Hx-y^Hx)\right)=(x-y)\left(1-\frac{2(\|x\|_2^2-y^Hx)}{\underbrace{\|x\|_2^2-2Re(y^Hx)+\|y\|_2^2}_{\|x-y\|_2^2=(x^H-y^H)(x-y)=\cdots}}\right)$$
$$\overset{\text{بنابر فرض}}{=}(x-y)\left(1-\frac{2(\|x\|_2^2-y^Hx)}{2\|x\|_2^2-2(y^Hx)}\right)=0 \Longrightarrow Ux=y.$$

$(x,y)=y^Hx$ حقیقی است و $\|x\|_2^2=\|y\|_2^2$.

▲

قضیه (قضیه‌ی تجزیه‌ی شور (Schur)): برای هر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$، ماتریس یکانی U وجود دارد به طوری که

$$U^HAU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = T$$

که λ_iها مقادیر ویژه‌ی A هستند. به بیان دیگر، هر ماتریس مربعی به‌طور یکانی مشابه با یک ماتریس مثلثی است.

اثبات. با استقرا روی n، مرتبه‌ی ماتریس A، عمل می‌کنیم. برای حالت $n=1$ قضیه بدیهی است. حال فرض کنید برای همه‌ی ماتریس‌های مرتبه‌ی $n-1$ قضیه برقرار باشد و A یک ماتریس مرتبه‌ی n باشد. فرض کنید λ مقدار ویژه‌ی A و y یک بردار ویژه‌ی متناظر با آن باشد. بدون کاستن از کلیت مسأله فرض کنیم $\|y\|_2=1$.

فرض کنیم $e^{(1)}=(1,0,0,\dots,0)^T$ و

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{y_1}{|y_1|}, & y_1 \neq 0 \\ 1, & y_1 = 0 \end{cases}$$

در این صورت با تعریف $x=\beta e^{(1)}$، بوضوح $\|x\|_2=1$ (پس $\|x\|_2=\|y\|_2$) و همچنین با توجه به اینکه فقط مولفه‌ی اول x غیر صفر است داریم

$$(x,y) = y^Hx = \bar{y}_1x_1 = \begin{cases} 0, & y_1=0 \\ \bar{y}_1 \cdot \dfrac{y_1}{|y_1|}, & y_1\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y_1=0 \\ |y_1|, & y_1\neq 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$$

بنابراین بنا به لم 2، ماتریس یکانی U چنان وجود دارد که $Ux=y$ یا $U\beta e^{(1)}=y$. چون U یکانی است پس $U^H=U^{-1}$ و

$$\beta e^{(1)} = U^Hy$$

و داریم

$$\overbrace{U^HAUe^{(1)}}^{\text{ستون اول } U^HAU \text{ را نتیجه می‌دهد}} = U^HA\beta^{-1}y = \beta^{-1}U^HAy = \beta^{-1}U^H\lambda y = \beta^{-1}\lambda U^Hy = \beta^{-1}\lambda\beta e^{(1)} = \lambda e^{(1)}$$

این ثابت می‌کند که اولین ستون U^HAU برابر $\lambda e^{(1)}$ است. فرض کنید $\tilde{A}$ ماتریس بدست آمده از U^HAU با حذف ستون اول و سطر اول باشد. بنا به فرض استقرا، یک ماتریس یکانی Q از مرتبه‌ی n وجود دارد به طوری که $Q^H\tilde{A}Q$ بالامثلثی باشد. ماتریس یکانی‌ای که A را به شکل مثلثی تبدیل می‌کند عبارت است از: $V = U\begin{bmatrix} 1 & 0_{1\times(n-1)} \\ 0_{(n-1)\times 1} & Q \end{bmatrix}$ زیرا

$$V^HAV = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^H \end{bmatrix} U^HAU \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & w_{1\times(n-1)} \\ 0_{(n-1)\times 1} & \tilde{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & wQ \\ 0 & \tilde{A}Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & wQ \\ 0 & Q^H\tilde{A}Q \end{bmatrix}$$

و چون $Q^H\tilde{A}Q$ بالامثلثی است از فوق نتیجه می‌گیریم V^HAV مثلثی است و V یکانی است چون U و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ یکانی است.

پس حکم اثبات است.

تبصره: اگر یک مقدار ویژه‌ی λ از ماتریس $n\times n$، A معلوم باشد، آنگاه اثبات تفسیری شور، نشان می‌دهد که چگونه ماتریس $(n-1)\times(n-1)$، $\tilde{A}$ که مقادیر ویژه‌اش همان مقادیر ویژه‌ی A بغیر از λ هستند، تولید می‌شود. این روش، "روش تقلیل" نامیده می‌شود. این روش به صورت زیر بیان می‌شود:

(i) یک بردار ویژه‌ی y متناظر با یک مقدار ویژه‌ی معلوم λ به دست آورید؛

(ii) اگر $y_1 \neq 0$، تعریف کنید $\beta = \frac{y_1}{|y_1|}$، و در غیر این صورت قرار دهید $\beta = 1$؛

(iii) تعریف کنید $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\|\beta e^{(1)} - y\|_2}$ و $v = \alpha(\beta e^{(1)} - y)$ و $U = I - vv^H$.

(iv) اکنون، $\tilde{A}$ ماتریس به دست آمده از حذف سطر اول و ستون اول $U^H A U$ می‌باشد.

تبصره: تجزیه‌ی شور یک ماتریس منحصر به فرد نیست.

یک نتیجه از تجزیه‌ی شور:

فرض کنیم (از تجزیه‌ی شور) A تجزیه‌ای به فرم زیر داشته باشد

$$A = UTU^H \qquad (U^H A U = T \Rightarrow)$$

$$\Rightarrow A^H = U T^H U^H$$

بنابراین اگر A هرمیتی باشد ($A = A^H$)، بایستی $T = T^H$ و در نتیجه

$$T = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \Lambda \quad (\text{که } \lambda_i \in \mathbb{R}).$$

لذا، هر ماتریس هرمیتی به طور یکانی با یک ماتریس قطری حقیقی مشابه است. یعنی اگر A هرمیتی باشد، هر تجزیه‌ی شور A قطری است و در چنین حالتی چون

$$U^H A U = \Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

نتیجه می‌گیریم $AU = U\Lambda$، یعنی $Au_i = \lambda_i u_i$، $1 \le i \le n$ که u_i ستون iام U است. بنابراین بردارهای ستونی U بردارهای ویژه‌ی A هستند و چون بردارهای ویژه دو به دو متعامدند، نتیجه می‌گیریم که یک ماتریس هرمیتی بردارهای ویژه‌ی متعامدی دارد که کل C^n را تولید می‌کنند.

روش ژاکوبی برای محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس

روش ژاکوبی برای محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس های حقیقی و متقارن استفاده می شود.

ایده اصلی روش، ضرب مکرر ماتریس A در ماتریس های دوران مقدماتی گیونز است.

قبل از بیان روش، ماتریس های دوران موسوم به ماتریس های معرفی می شوند.

تعریف. فرض کنید $\theta \in \mathbb{R}$ یک زاویه باشد و $p \neq q$ اعداد صحیح بین ۱ و n باشند. ماتریس گیونز، یک ماتریس دوران مانند E_{pq} است که درایه های آن عبارتند از:

درایه واقع در سطر p ام و ستون p ام: $\cos\theta$

" " " p ام و " q ام: $\sin\theta$

" " " q " و " p " : $-\sin\theta$

" " " q " و " q " : $\cos\theta$

سایر درایه های ماتریس: δ_{ij}

$$E_{pq} = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\theta & & \sin\theta & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & -\sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & \ddots \ \ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & p & q \end{array} & \end{array}$$

مثال.

$$n=2, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$n=4, \quad E_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

لم. ماتریس‌های دوران متعامد هستند و بازای هر ماتریس حقیقی متقارن مانند A داریم

$$\sum_{1\le i,j\le n} b_{ij}^2 = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 ,$$

که در آن $B = E_{pq}^T A E_{pq}$.

اثبات. بایستی نشان دهیم $E_{pq} E_{pq}^T = I$.

فرض کنید $E_{pq} E_{pq}^T = C$ (یا به عبارتی $E_{pq} E_{qp} = C$). با توجه به ساختار ماتریس دوران بایستی نشان دهیم که چهار درایه (p,p)، (q,q)، (p,q) و (q,p) به ترتیب برابر ۱، ۱، ۰ و ۰ هستند. به عبارت دیگر بایستی نشان دهیم $C_{pq} = \delta_{pq}$ (زیرا سایر عناصر C در رابطه $C_{ij} = \delta_{ij}$ صدق می‌کنند).

$$C_{pq} = E_{pq} \text{ سطر } p \text{ ام} \times E_{qp} \text{ ستون } q \text{ ام}$$

$$= (0,\cdots,\cos\theta,0,\cdots,0,\sin\theta,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \cos\theta\\ \vdots\\ \sin\theta\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

به طور مشابه می‌توان سایر مولفه‌ها را نیز بررسی کرد.

برای اثبات قسمت دوم به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = \|B\|_F^2 = tr(B^T B) = tr(E_{pq}^T A^T A E_{pq})$$

که در آن $\|\cdot\|_F$ نرم فروبنیوس است. چون $tr(MN) = tr(NM)$، داریم

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = tr(AA^T) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 .$$

• با توجه به اینکه E_{pq} متعامد است می‌توان نتیجه گرفت A و B متشابهند، در واقع

$$E_{pq} E_{pq}^T = I \Rightarrow E_{pq}^{-1} = E_{pq}^T$$

$$B = E_{pq}^T A E_{pq} = E_{pq}^{-1} A E_{pq} \xRightarrow{\text{متشابهند}}$$ ماتریس‌های A, B متشابهند

لذا مقادیر ویژه یکسانی خواهند داشت.

همچنین، با توجه به اینکه A یک ماتریس متقارن است، B نیز چنین است.

$$B^T = E_{pq}^T A^T E_{pq} = E_{pq}^T A E_{pq}$$

علاوه بر این، عناصر دو ماتریس A و B باهم برابرند به جز درایه‌های واقع در سطرهای pام و qام و همچنین درایه‌های واقع در ستون pام و qام.

نم. اگر عناصر A را با a_{ij} و B را با b_{ij} نشان دهیم، داریم

$$(1) \quad b_{pk} = b_{kp} = a_{pk}\cos\theta - a_{qk}\sin\theta, \quad k \neq p,\ k \neq q \quad k = 1, \dots, n$$

$$(2) \quad b_{qk} = b_{kq} = a_{pk}\sin\theta + a_{qk}\cos\theta, \quad k = 1, \dots, n \quad k \neq p, q$$

$$(3) \quad b_{pp} = a_{pp}\cos^2\theta - 2a_{pq}\sin\theta\cos\theta + a_{qq}\sin^2\theta$$

$$(4) \quad b_{qq} = a_{pp}\sin^2\theta + 2a_{pq}\sin\theta\cos\theta + a_{qq}\cos^2\theta$$

$$(5) \quad b_{pq} = b_{qp} = (a_{pp} - a_{qq})\sin\theta\cos\theta + a_{pq}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

در واقع، به ازای زاویه دلخواه θ، داریم

$$\begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{pq} & b_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

حال فرض کنید a_{pq} ، بزرگترین عنصر (از نظر قدر مطلق) غیر واقع بر قطر اصلی ماتریس A باشد.
θ را طوری تعریف می‌کنیم که عنصر متناظر با آن در ماتریس $B_1 = E_{pq}^T A E_{pq}$ ، یعنی ، b_{pq} صفر شود.

$$b_{pq}=0 \Rightarrow (a_{pp}-a_{qq})\sin\theta\cos\theta + a_{pq}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0$$

$$\Rightarrow (a_{pp}-a_{qq})\sin 2\theta = -2a_{pq}\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{-2a_{pq}}{a_{pp}-a_{qq}} \,, \quad a_{pp}-a_{qq}\neq 0 \qquad (6)$$

فرض کنید $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. اگر $a_{pp}-a_{qq}=0$ آنگاه از رابطه (5) داریم

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \qquad (7)$$

بنابراین ، با توجه به اینکه $B_1=E_{pq}^T A E_{pq}$ ، با انتخاب θ از رابطه (6) (یا با انتخاب $\theta=\frac{\pi}{4}$ وقتی $a_{pp}-a_{qq}=0$) عنصر (p,q) از ماتریس B_1 صفر خواهد شد.

حال فرض کنید b_{rs} بزرگترین عنصر (از نظر قدر مطلق) غیرقطری B_1 باشد. قرار دهید

$$B_2 = E_{rs}^T B_1 E_{rs}$$

ماتریس دوران E_{rs} را طوری تعیین می‌کنیم (θ آن را) که عنصر (r,s) در ماتریس B_2 صفر شود. بدین منظور کافی است θ را از رابطه زیر محاسبه کنیم

$$\tan\theta = \frac{-2b_{rs}}{b_{rr}-b_{ss}} \,.$$

همانطور که ملاحظه می‌شود عنصر (p,q) که در ماتریس B_1 صفر شد اما در ماتریس B_2 ، لزوماً صفر نیست. اما می‌توان ثابت کرد اگر روند فوق را ادامه دهیم حد دنباله ماتریس‌های $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک ماتریس قطری مانند D است که عناصر قطری D ، مقادیر ویژه A هستند.

تعریف. روش ژاکوبی برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس حقیقی متقارن A به صورت دنباله‌ای از ماتریس‌های $A_k=(a_{ij}^k)_{1\le i,j\le n}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، ساخته می‌شود

$$\begin{cases} A_0=A, \\ A_{k+1}=E_{p_kq_k}^T\, A_k\, E_{p_kq_k}, \end{cases}$$

که در آن $E_{p_kq_k}$ ماتریس دوران گیونز با ویژگی‌های زیر است:

(i) (p_k, q_k) یک جفت از اندیس‌هایی هستند که $|a_{p_kq_k}^k| = \max\limits_{i\neq j} |a_{ij}^k|$.

(ii) θ در گام kام طوری انتخاب می‌شود که $a_{p_kq_k}^{k+1}=0$.

قضیه. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی و متقارن با مقادیر ویژه $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ باشد در این صورت دنباله ماتریس‌های A_k روش ژاکوبی همگرا است و

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = \operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(i)}),$$

که در آن σ یک جایگشت از $\{1,2,\dots,n\}$ است.

اثبات. داریم

$$A_1=E_{p_0q_0}^T A_0 E_{p_0q_0}$$

$$A_2=E_{p_1q_1}^T A_1 E_{p_1q_1} = E_{p_1q_1}^T E_{p_0q_0}^T A E_{p_0q_0} E_{p_1q_1}$$

$$\vdots$$

$$A_k=E_{p_{k-1}q_{k-1}}^T E_{p_{k-2}q_{k-2}}^T \cdots E_{p_0q_0}^T A E_{p_0q_0} \cdots E_{p_{k-1}q_{k-1}}$$

فرض کنید $P_k=E_{p_0q_0}\cdots E_{p_{k-1}q_{k-1}}$. در این صورت

$$A_k=P_k^T A P_k \qquad (E_{p_iq_i} \text{ متعامدند} \rightarrow P_k \text{ متعامد}) \quad P_k^{-1}=P_k^T$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که به ازای هر k، A_k با A متشابه است. لذا وقتی $k \to \infty$، درایه‌های قطری A_k به سمت مقادیر ویژه A میل می‌کنند و همچنین ستون‌های P_k نیز به سمت بردارهای ویژه متناظر میل می‌کنند وقتی که $k \to \infty$.

تذکر. در روش ژاکوبی، برای بدست آوردن ماتریس‌های دوران بصورت زیر عمل می‌کنیم،

$$\tan 2\theta = \frac{-2a_{pq}}{a_{pp}-a_{qq}},$$

فرض کنید $f=-a_{pq}$ و $g=-\frac{1}{2}(a_{pp}-a_{qq})$. دراین صورت

$$\tan 2\theta = \frac{f}{g},$$

و

$$\sin\theta = \frac{h}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-h^2})}}, \quad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta},$$

که در آن $h = \mathrm{sign}(g)\dfrac{f}{\sqrt{f^2+g^2}}$، و $\mathrm{sign}(\cdot)$ تابع علامت است.

مثال. مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را با استفاده از روش ژاکوبی بدست آورید.

(a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

بزرگترین درایه غیرقطری A، یک است. فرض کنید $a_{12}=1$ را انتخاب کنیم.

ماتریس گیونز E_{12} را طوری تعیین می‌کنیم که درایه $(1,2)$ ماتریس $E_{12}^T A E_{12}$ برابر صفر شود.

$$E_{12}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$a_{11}-a_{22}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \Rightarrow E_{12}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$E_{12}^T A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix},\quad E_{12}^T A E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=D$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=2\end{cases}$$

ستون اول ماتریس $P=E_{12}$ بردار ویژه نظیر $\lambda_1=0$ و ستون دوم P، بردار ویژه نظیر $\lambda_2=2$ است، یعنی،

$$x_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

(b) $$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

بزرگترین درایه غیرقطری از نظر قدر مطلق $a_{13}=-2$ است. بنابراین ماتریس دوران E_{13} است. داریم

$$f=-a_{13}=2,\quad g=\frac{1}{2}(a_{11}-a_{33})=\frac{1}{2}$$

$$h=\frac{2}{\sqrt{4+0.25}}=0.970$$

لذا

$$\sin\theta=0.615,\quad \cos\theta=0.788$$

بنابراین ماتریس دوران بصورت زیر است

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0.788 & 0 & 0.615 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.615 & 0 & 0.788 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = E_{13}^T A E_{13} = \begin{pmatrix} 0.562 & 2.019 & 0.000 \\ 2.019 & -1.000 & -0.961 \\ 0.000 & -0.961 & -3.562 \end{pmatrix}$$

بزرگترین درایه غیرقطری B_1 از لحاظ قدرمطلق در مکان $(1,2)$ قرار دارد. بنابراین ماتریس دوران E_{12} است که بصورت زیر بدست می‌آید

$$f = -b_{12} = 2.019, \qquad g = \frac{1}{2}(b_{11} - b_{22}) = 0.788$$

$$\Rightarrow E_{12} = \begin{pmatrix} 0.825 & -0.565 & 0.000 \\ 0.565 & 0.825 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$B_2 = E_{12}^T B_1 E_{12} = \begin{pmatrix} 1.946 & -0.000 & -0.543 \\ -0.000 & -2.384 & 0.793 \\ -0.543 & -0.793 & -3.562 \end{pmatrix}$$

با ادامه این روند و به کمک ماتریس‌های دوران E_{23}، E_{13}، E_{12} و E_{23} به ترتیب ماتریس‌های B_3، B_4، B_5 و B_6 بدست می‌آیند.

$$B_6 = E_{23}^T B_5 E_{23} = \begin{pmatrix} 2.000 & 0.000 & 0.001 \\ 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0.001 & -0.000 & -4.000 \end{pmatrix}$$

در ماتریس B_6 قدر مطلق درایه‌های غیرقطری از $\epsilon = 0.01$ کوچکترند. به عبارت دیگر B_6 "تقریباً" قطری است. لذا مقادیر ویژه گردشده تا سه رقم اعشار عبارتند از

$$\lambda_1 \approx 2.000, \quad \lambda_2 = -2.000, \quad \lambda_3 = -4.000$$

برای محاسبه بردارهای ویژه داریم

$$P = E_{13}E_{12}E_{23}E_{13}E_{21}E_{23} = \begin{pmatrix} 0.577 & -0.707 & 0.408 \\ 0.577 & 0.707 & 0.408 \\ -0.578 & -0.000 & 0.816 \end{pmatrix}$$

لذا

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ -0.578 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0.707 \\ -0.000 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0.408 \\ 0.408 \\ 0.816 \end{pmatrix}$$

بترتیب بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ_1، λ_2 و λ_3 هستند.

مقادیر ویژه واقعی عبارتند از $\lambda_1 = 2$، $\lambda_2 = -2$ و $\lambda_3 = -4$ و بردارهای ویژه متناظر با آنها نیز به ترتیب $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$، $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ هستند.

روش تکراری توانی برای محاسبه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

این روش برای محاسبه‌ی مقدار ویژه‌ی غالب (بزرگترین مقدار ویژه‌ی A از لحاظ قدر مطلق) و یک بردار ویژه‌ی متناظر با آن بکار می‌رود. برای راحتی، لازم است که فرض کنیم A دارای دو خاصیت زیر است:

(۱) تنها یک مقدار ویژه با ماکزیمم قدر مطلق وجود دارد؛

(۲) یک مجموعه‌ی مستقل خطی از n بردار ویژه وجود دارد؛

بنا به فرض اول، مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ می‌توانند به صورت زیر شماره‌گذاری شوند که

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|\ge|\lambda_3|\ge\dots\ge|\lambda_n|.$$

بنا به فرض دوم، یک پایه‌ی $\{u^{(1)},u^{(2)},\dots,u^{(n)}\}$ برای $\mathbb{C}^n$ وجود دارد به طوری که

$$Au^{(j)}=\lambda_j u^{(j)}, \quad 1\le j\le n$$

فرض کنید $x^{(0)}\in\mathbb{C}^n$ برداری دلخواه باشد به طوری که وقتی $x^{(0)}$ برحسب ترکیب خطی از عناصر پایه‌ی $u^{(1)},\dots,u^{(n)}$ بیان می‌شود، ضریب $u^{(1)}$ صفر نباشد. بنابراین

$$x^{(0)}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u^{(j)}, \quad \alpha_1\neq 0 \qquad (*)$$

با ضرب طرفین تساوی $(*)$ در $A, A^2, \dots, A^k$ بدست می‌آوریم

$$Ax^{(0)}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j Au^{(j)}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_j u^{(j)}$$

$$A^2x^{(0)}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A^2u^{(j)}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_j^2 u^{(j)}$$

$$\vdots$$

$$A^kx^{(0)}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A^ku^{(j)}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_j^k u^{(j)}$$

و در نتیجه، خواهیم داشت

$$A^k x^{(0)} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k u^{(j)}$$

اکنون، با توجه به اینکه $|\lambda_1|>|\lambda_j|$، برای $j=2,3,\dots,n$، داریم

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0$$

و در نتیجه

$$\lim_{k\to\infty} A^k x^{(0)} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \alpha_1 u^{(1)}$$

اگر $|\lambda_1|<1$ حد فوق صفر است و اگر $|\lambda_1|>1$، این حد موجود نیست (البته با توجه به اینکه $\alpha_1 \neq 0$). بنابراین برای تولید تقریبات $\{x^{(k)}\}$ برای بردار ویژه از $x^{(k+1)}=Ax^{(k)}=A^k x^{(0)}$ استفاده نمی‌توان کرد و روند به صورت زیر بیان می‌شود (نرمالایز کردن):

فرض کنیم $y^{(1)}=Ax^{(0)}$ و p_0 کوچکترین عدد صحیح باشد که $1\le p_0\le n$ و برای آن

$$|x_{p_0}^{(0)}| = \max_{1\le i\le n} |x_i^{(0)}| = \|x^{(0)}\|_\infty$$

$\mu^{(1)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu^{(1)} = \frac{y_{p_0}^{(1)}}{x_{p_0}^{(0)}}$$

فرض کنید p_1 کوچکترین عدد صحیح باشد که $1\le p_1\le n$ و

$$|y_{p_1}^{(1)}| = \|y^{(1)}\|_\infty$$

و بردار $x^{(1)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}}\, y^{(1)} = \frac{Ax^{(0)}}{\|Ax^{(0)}\|_\infty}$$

با توجه به این روند داریم $\|x^{(1)}\|_\infty = 1$، زیرا

$$\|x^{(1)}\|_\infty = \frac{1}{|y_{p_1}^{(1)}|}\, \|y^{(1)}\|_\infty = \frac{1}{|y_{p_1}^{(1)}|}\, |y_{p_1}^{(1)}| = 1.$$

و چون

$$x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^{(j)}$$

آنگاه

$$y^{(1)} = Ax^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j u^{(j)}$$

و داریم

$$\mu^{(1)} = \frac{y^{(1)}_{p_0}}{x^{(0)}_{p_0}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j u^{(j)}_{p_0}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^{(j)}_{p_0}}$$

$$= \frac{\alpha_1 \lambda_1 u^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \lambda_j u^{(j)}_{p_0}}{\alpha_1 u^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j u^{(j)}_{p_0}}$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 u^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) u^{(j)}_{p_0}}{\alpha_1 u^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j u^{(j)}_{p_0}} \right)$$

به همین ترتیب داریم:

$$y^{(2)} = Ax^{(1)}$$

$$= \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}} A y^{(1)}$$

$$= \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}} A^2 x^{(0)}$$

$$= \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 u^{(j)} \quad \& \quad x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{y^{(2)}_{p_2} \|y^{(2)}\|_\infty} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1} y^{(2)}_{p_2}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 u^{(j)}$$

و

$$\mu^{(2)} = \frac{y^{(2)}_{p_1}}{x^{(1)}_{p_1}} = \frac{\frac{1}{y^{(1)}_{p_1}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 u^{(j)}_{p_1}}{\left(\frac{y^{(1)}}{y^{(1)}_{p_1}}\right)_{p_1} \frac{(Ax^{(0)})_{p_1}}{y^{(1)}_{p_1}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{y^{(1)}_{p_1}}} \sum \alpha_j \lambda_j^2 u^{(j)}_{p_1}}{\cancel{\frac{1}{y^{(1)}_{p_1}}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j u^{(j)}_{p_1}}$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 u^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^2 u^{(j)}_{p_1}}{\alpha_1 u^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) u^{(j)}_{p_1}} \right)$$

به همین ترتیب

$$x^{(m-1)} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1} y^{(2)}_{p_2} \cdots y^{(m-1)}_{p_{m-1}}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^{m-1} u^{(j)}$$

$$y^{(m)} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1} y^{(2)}_{p_2} \cdots y^{(m-1)}_{p_{m-1}}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^{m} u^{(j)}$$

و همچنین

$$\mu^{(m)} = \frac{y^{(m)}_{p_{m-1}}}{x^{(m-1)}_{p_{m-1}}} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 u^{(1)}_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m u^{(j)}_{p_{m-1}}}{\alpha_1 u^{(1)}_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{m-1} u^{(j)}_{p_{m-1}}} \qquad (**)$$

و

$$x^{(m)} = \frac{y^{(m)}}{y^{(m)}_{p_m}} \Longrightarrow x^{(m)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^m u^{(j)}}{y^{(1)}_{p_1} y^{(2)}_{p_2} \cdots y^{(m)}_{p_m}},$$

که در آن p_m کوچکترین عدد صحیحی است که $1 \le p_m \le n$ و $\|y^{(m)}\|_\infty = |y^{(m)}_{p_m}|$.

با توجه به رابطه‌ی $(**)$ و اینکه $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$ در می‌یابیم که

$$\lim_{m\to\infty} \mu^{(m)} = \lambda_1 \qquad (\text{با فرض } \alpha_1 \neq 0)$$

و همچنین داریم

$$x^{(m)} = \frac{y^{(m)}}{\|y^{(m)}\|_\infty}$$

$$= \frac{Ax^{(m-1)}}{\|Ax^{(m-1)}\|_\infty}$$

$$= \frac{A^m x^{(0)}}{\|A^m x^{(0)}\|_\infty} = \frac{\lambda_1^m \alpha_1 u^{(1)} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} \alpha_1 \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m u^{(j)}}_{\to 0 \text{ as } m\to\infty}}{|\lambda_1|^m \|\alpha_1 u^{(1)} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} \alpha_1 \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m u^{(j)}}_{\to 0 \text{ as } m\to\infty}\|_\infty}$$

بنابراین زمانیکه $m\to\infty$، $x^{(m)}$ هم به ضریبی از $u^{(1)}$ میل می‌کند.

70

الگوریتم روش توانی:

برای تعیین مقدار ویژه‌ی غالب از یک ماتریس A و یک بردار ویژه‌ی مربوط با نرم یک، بردار $x^{(0)}$ را انتخاب می‌کنیم:

مرحله‌ی (i): قرار می‌دهیم $m=1$ و کوچکترین عدد صحیح p_0 را طوری می‌یابیم که

$$|x^{(0)}_{p_0}| = \|x^{(0)}\|_\infty .$$

مرحله‌ی (ii): $y^{(m)} = Ax^{(m-1)}$ را حساب می‌کنیم؛

مرحله‌ی (iii): هرگاه $y^{(m)} = \bar{0}$، آنگاه صفر یک مقدار ویژه‌ی A با بردار ویژه‌ی $x^{(m-1)}$ است. بردار $x^{(0)}$ دیگری انتخاب می‌کنیم و به مرحله‌ی (i) می‌رویم؛

مرحله‌ی (iv): قرار می‌دهیم $\mu^{(m)} = \dfrac{y^{(m)}_{p_{m-1}}}{x^{(m-1)}_{p_{m-1}}}$؛

مرحله‌ی (v): کوچکترین عدد صحیح p_m را می‌یابیم که $|y^{(m)}_{p_m}| = \|y^{(m)}\|_\infty$؛

مرحله‌ی (vi): قرار می‌دهیم $x^{(m)} = \dfrac{y^{(m)}}{y^{(m)}_{p_m}}$؛

مرحله‌ی (vii): اگر $\mu^{(m)}$ تخمینی به حد کافی دقیق از λ باشد، به مرحله‌ی (x) می‌رویم؛

مرحله‌ی (viii): 1 را به m می‌افزائیم ($m \leftarrow m+1$)؛

مرحله‌ی (ix): به مرحله‌ی (ii) می‌رویم؛

مرحله‌ی (x): روند تمام است؛ $\mu^{(m)}$ تقریبی به مقدار ویژه‌ی غالب A و $x^{(m)}$ یک بردار تکراری است که بردار ویژه‌ی مربوط را تقریب می‌زند.

تعریف ۱: می‌توان نشان داد که اگر $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ به λ_1 همگرا است، توسط نسبتهای $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^m$ به ازای $j=2,\dots,n$، بویژه

با $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m$ تعیین می‌شود. یعنی، همگرایی از مرتبه‌ی $O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|\right)$ است.

تعریف 2: در عمل لازم نیست ماتریس A دارای n مقدار ویژه‌ی متمایز باشد تا روش توانی همگرا باشد. در واقع، اگر مقدار ویژه‌ی غالب منحصر بود λ_1 دارای مرتبه‌ی تکرار $r>1$ بوده و بردارهای ویژه‌ی $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}$ مربوط به λ_1 مستقل خطی باشند، روند باز هم به λ_1 همگرا است. دنباله $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ از بردارها در این حالت به یک بردار ویژه‌ی λ_1 باز هم یک میل خواهد کرد که ترکیب خطی از $u^{(1)}, \dots, u^{(r)}$ است و به انتخاب $x^{(0)}$ (بردار اولیه) وابسته است.

تذکر: در الگوریتم روش تکراری توانی یکی از دو شرط زیر را می‌توان به عنوان معیار توقف بکار برد:

$$(i)\ \|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty<\varepsilon \quad \text{یا} \quad (ii)\ |\mu_m-\mu_{m-1}|<\varepsilon.$$

مثال. تقریب بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی غالب ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -2 & -5\end{bmatrix}$$

با بردار اولیه‌ی $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$: $x^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

اگر در هر مرحله بردارها را نرمال نکنیم و از $x^{(k+1)}=Ax^{(k)}=A^{k}x^{(0)}$ استفاده کنیم:

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^{(k+1)}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-8\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}20\\-14\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-44\\30\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}92\\-62\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-188\\126\end{bmatrix}$

ملاحظه می‌کنیم که $x^{(k+1)}\to\infty$ (زمانیکه $k\to\infty$). حال اگر طبق روش توانی عمل کنیم (نرمال کردن بردارها در هر مرحله)

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^{(k+1)}=\frac{Ax^{(k)}}{\\|Ax^{(k)}\\|_\infty}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\0.75\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-0.7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\0.682\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-0.674\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\0.67\end{bmatrix}$

ملاحظه می‌کنیم دنباله بالا به ترتیب همگرا می‌شوند. مقادیر و بردارهای ویژه‌ی A عبارتند از: $\left(-1,\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix}\right)$ و $\left(-2,\begin{bmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\right)$:

or $\left(-2,\begin{bmatrix}-1\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}\right)$.

مثال. ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 14 & 0\\ -5 & 13 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید و الگوریتم روش توانی را برای تقریب مقدار ویژه‌ی غالب A و بردار ویژه‌ی نظیرش بکار ببندید

حل. A دارای مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1=6$، $\lambda_2=3$ و $\lambda_3=2$ است. فرض کنیم $x^{(0)}=(1,1,1)^t$. در این صورت

تکرار اول:

$$y^{(1)}=Ax^{(0)}=(10,8,1)^T \quad \& \quad \|y^{(1)}\|_\infty=10=|y_1^{(1)}| \Rightarrow p_1=1$$

$$\mu^{(1)}=\frac{y_{p_1}^{(1)}}{x_1^{(0)}}=10 \quad \text{و} \quad \|x^{(0)}\|_\infty=|x_1^{(0)}| \rightarrow p_0=1$$

$$x^{(1)}=\frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_\infty}=(1,0.8,0.1)^T$$

تکرار دوم:

$$y^{(2)}=Ax^{(1)}=(7.2,5.4,-0.8)^T$$

$$\mu^{(2)}=\frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}}=7.2 \quad , \quad \|y^{(1)}\|_\infty=|y_1^{(1)}| \Rightarrow p_1=1$$

$$x^{(2)}=\frac{y^{(2)}}{\|y^{(2)}\|_\infty}=(1,0.75,-0.111)^T$$

و تکرارهای بعدی به طریق مشابه انجام می‌شود تا زمانیکه معیار توقف برقرار گردد.

روش تکراری QR برای تقریب مقادیر ویژه‌ی ماتریس :

با استفاده از روش تکراری QR، همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ را می‌توان تقریب زد. در این روش، ایده‌ی اساسی این است که ماتریس A را به ماتریسی تبدیل کنیم (به طور مشابه) که بدست آوردن مقادیر ویژه‌ی آن راحت‌تر است.

در واقع، مسأله‌ی یافتن مقادیر ویژه‌ی ماتریس A به طور کامل حل خواهد شد اگر ماتریس یکانی U، معرفی شده با تجزیه‌ی شور، بتواند بطور مستقیم (پس از تعداد متناهی اعمال حسابی) بدست آید، در این صورت $T=U^{H}AU$ یک ماتریس بالامثلثی با عناصر قطری $t_{ii}=\lambda_i(A)$ خواهد بود. اما چون یافتن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس معادل با یافتن ریشه‌های یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n است، بنابراین بدست آوردن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس برای $n\geq 5$ها به طور دقیق میسر نیست (روشی کلی وجود ندارد)، بنابراین ناچاریم با استفاده از روشهای تکراری آنها را تقریب زد.

استفاده از روش QR برای بدست آوردن تقریب به مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس نیاز به اطلاعاتی در مورد تجزیه‌ی متعامد ماتریس دارد که ذیلاً به آن می‌پردازیم.

تجزیه‌های متعامد

تعریف. یک مجموعه از بردارهای اندیس‌دار $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ در $\mathbb{C}^n$ متعامد نامیده می‌شوند اگر $(v_i, v_j)=0$ برای $i \neq j$. اگر داشته باشیم $(v_i, v_j)=\delta_{ij}$، آنگاه مجموعه "یکامتعامد" نامیده می‌شود. با اختیار کردن $j=i$، مشاهده می‌کنیم $\|v_i\|_2 = 1$ برای هر i. اگر v_i ستونهای یک ماتریس $n \times k$ مانند A باشند، آنگاه یکامتعامد بودن توسط معادله ماتریسی $A^H A = I$ بیان می‌شود.

قضیه. ماتریس $Q=(q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ متعامد است اگر و فقط اگر ستونهای آن مجموعه‌ای متعامد از بردارهای یکامتعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند (ستونهای آن مجموعه‌ای یکامتعامد باشند).

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$B=(b_{ij})=Q^T Q.$$

بنابراین

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} q_{ki} q_{kj} = (q_i, q_j)$$

که q_i و q_j ترتیب ستونهای iام و jام ماتریس Q هستند.

اگر ستونهای Q یکامتعامد باشند آنگاه

$$b_{ij}=\delta_{ij}$$

بنابراین $B=I$. (به طور مشابه برای $C=QQ^T$ داریم $C=I$) ولذا Q متعامد است.

برعکس فرض کنید Q متعامد است. بنابراین $B=Q^T Q=I$ ولذا از $\delta_{ij}=b_{ij}=(q_i, q_j)$ نتیجه می‌گیریم ستونهای Q یکامتعامداند. ▲

تبصره: فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک پایه یکامتعامد برای $\mathbb{C}^n$ باشد. هر عنصر $x \in \mathbb{C}^n$ یک نمایش منحصر بفرد به شکل

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

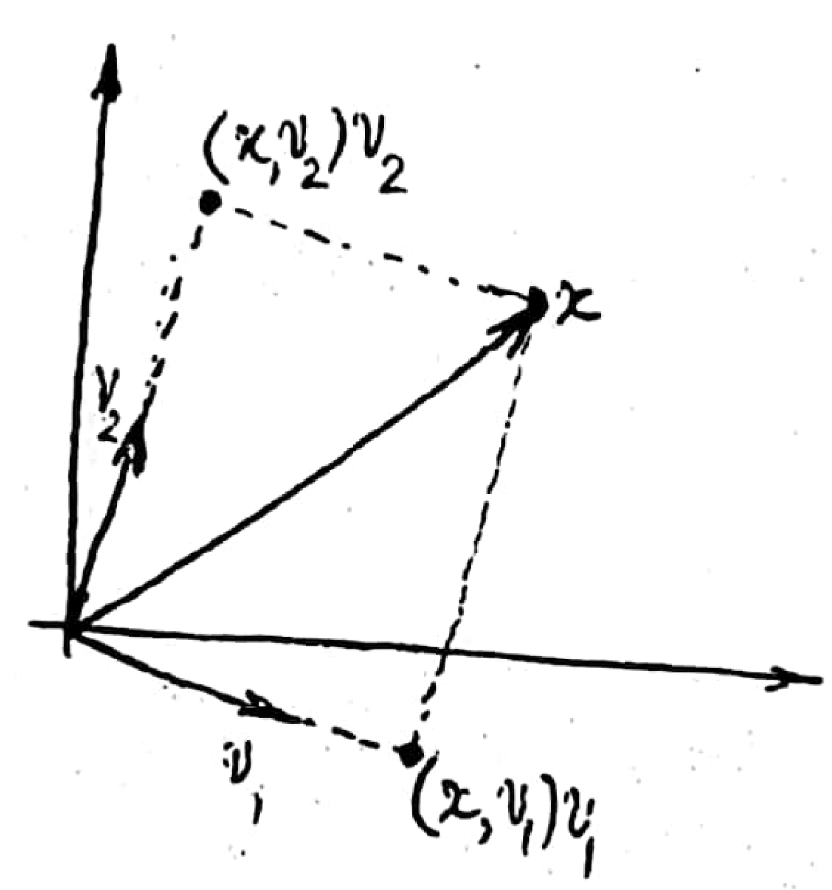
با اسکالرهای مناسب c_i دارد. با ضرب داخلی طرفین رابطه‌ی بالا در v_j خواهیم داشت

$$(x, v_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i , v_j \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i (v_i , v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} = c_j$$

این رابطه به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n$ نتیجه می‌دهد:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, v_i) v_i \qquad (1)$$

عبارت $(x, v_i) v_i$ به عنوان مولفه‌ی x در جهت v_i تلقی می‌شود. یک نمونه از این وضعیت در $\mathbb{R}^2$ در شکل زیر نشان داده شده است



فرآیند گرام اشمیت:

فرآیند گرام اشمیت می‌تواند برای بدست آوردن دستگاههای یکامتعامد در هر فضای ضرب داخلی مورد استفاده قرار گیرد. برای توضیح آن، فرض کنید یک دنباله‌ی مستقل خطی از بردارها در یک فضای ضرب داخلی وجود داشته باشد: $\{x_1, x_2, \dots\}$ (می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد). یک دنباله‌ی یکامتعامد با استفاده از فرمول زیر می‌تواند ایجاد شود:

$$u_k = \left(\left\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k , u_i) u_i \right\|_2 \right)^{-1} \left(x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k , u_i) u_i \right) ; \quad k \geq 1 \qquad (2)$$

قضیه (اینالوگرام - اشمیت). مجموعه $\{u_1, u_2, \dots\}$ حاصل از رابطه (2)، دارای این ویژگی است که $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ یک پایه یکامتعامد برای گسترش خطی $\{x_1, \dots, x_k\}$ به ازای $k \geq 1$ باشد.

مثال. نشان دهید سه بردار

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند. سپس، پایه‌ای یکامتعامد برای $\mathbb{R}^3$ با استفاده از آن‌ها بیابید.

مثال. فرض کنید

$$u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T, \quad u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)^T.$$

مجموعه $\{u_1, u_2\}$ را به یک پایه یکامتعامد برای $\mathbb{R}^3$ توسیع دهید.

مثال. نشان دهید سه بردار

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \;;\quad x_2=\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix} \;;\quad x_3=\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند و یک پایه‌ی یکامتعامد برای $\mathbb{R}^3$ با استفاده از آنها بیابید.

حل. به سادگی می‌توان نشان داد که بردارهای x_1، x_2 و x_3 مستقل خطی‌اند و چون تعداد آنها سه تا است،

بنابراین یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند. حال با استفاده از گرام اشمیت داریم:

$$u_1=\frac{x_1}{\|x_1\|_2}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$u_2'=x_2-(x_2,u_1)u_1=\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}-1\times\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix} \;;\quad \|u_2'\|_2=3\sqrt{2}$$

$$u_2=\frac{u_2'}{\|u_2'\|_2}=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$u_3'=x_3-(x_3,u_1)u_1-(x_3,u_2)u_2=\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}-1\times\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{5}{\sqrt{2}}\times\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5-5/2\\-5/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5/2\\-5/2\end{bmatrix}$$

$$\|u_3'\|_2=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$u_3=\frac{u_3'}{\|u_3'\|_2}=\frac{\begin{bmatrix}0\\5/2\\-5/2\end{bmatrix}}{5/\sqrt{2}}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

بنابراین $\{u_1,u_2,u_3\}$ پایه‌ای یکامتعامد برای $\mathbb{R}^3$ است.

p. 116 99-1400-1

مثال. بردارهای

$$u_1=\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T \quad ; \quad u_2=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)^T$$

داده شده‌اند. مجموعه‌ی $\{u_1, u_2\}$ را به یک پایه‌ی یکامتعامد برای $\mathbb{R}^3$ توسیع دهید.

حل. بردارهای u_1 و u_2 یکامتعامد هستند. کافی است با فرآیند گرام-اشمیت، بردار یکانی u_3 را طوری بسازیم

که مجموعه‌ی

$$\{u_1, u_2, u_3\}$$

یک پایه‌ی یکامتعامد باشد. بردار دلخواه v_3 را طوری انتخاب می‌کنیم که مجموعه‌ی $\{u_1, u_2, v_3\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی

باشد؛ به عنوان مثال، فرض کنیم $v_3=(1,0,0)^T$. برای محاسبه u_3 داریم

$$u_3' = v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \times \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \times \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

$$\|u_3'\|_2 = \sqrt{\frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|_2} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

(برای حل بدون گرام اشمیت، می‌توانستیم از

$$u_3'' = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$$

استفاده کنیم، که همان نتیجه‌ی قبلی بدست می‌آید. دقت کنید که اگر v_3 بردار دیگری غیراز $(1,0,0)^T$ و مستقل خطی با u_1 و u_2

در نظر می‌گرفتیم، u_3های دیگری بدست می‌آمد)

تبصره: اگر فرآیند گرام اشمیت بر روی ستونهای یک ماتریس بکار رود، می‌توانیم نتیجه را به عنوان یک تجزیه‌ی ماتریس تعبیر کنیم، در این حالت ضریبهای داخلی که در محاسبات مطرح می‌شوند، می‌توانند در ماتریسی ذخیره گردند که یکی از عاملها می‌باشد. این مطلب در قضیه‌ی زیر روشن می‌شود.

قضیه. وقتی که فرآیند گرام اشمیت بر روی ستونهای یک ماتریس $m\times n$ مانند A و از رتبه‌ی n بکار برده می‌شود یک تجزیه

$$A=BT$$

به وجود می‌آورد که در آن B یک ماتریس $m\times n$ با ستونهای یکامتعامد بوده و T یک ماتریس $n\times n$ بالامثلثی با عناصر قطری مثبت می‌باشد.

(تجزیه‌ی BT همان تجزیه QR است که Q یکانی و T بالامثلثی است)

اثبات. چون رتبه‌ی $A_{m\times n}$ برابر n است، پس ستونهای A مستقل خطی‌اند و لذا الگوریتم گرام اشمیت را می‌توان روی ستونهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ از A انجام داد. بعد از n گام گرام اشمیت به یک ماتریس $m\times n$ مانند B می‌رسیم که ستونهایش یک مجموعه‌ی یکامتعامد (n تا بردار در $\mathbb{R}^m$) را تشکیل می‌دهند و هر A_j یک ترکیب خطی از $B_1, B_2, \dots, B_j$ می‌باشد. در حقیقت بنابه (1)

$$\mathrm{Span}\{B_1,\dots,B_j\}=\mathrm{Span}\{A_1,\dots,A_j\} \Rightarrow A_j\in \mathrm{Span}\{B_1,\dots,B_j\}$$

داریم

$$A_j=\sum_{i=1}^{j}(A_j,B_i)B_i \qquad (*)$$

ماتریس بالامثلثی $T=(t_{ij})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_{ij}=\begin{cases}(A_j,B_i) & , i\le j\\ 0 & , i>j\end{cases}$$

بنابراین از $(*)$ داریم:

$$\forall j=1,2,\dots,n:\quad A_j=\sum_{i=1}^{j}t_{ij}B_i=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}B_i \qquad (**)$$

رابطه‌ی $(**)$ بیان می‌کند که $A=BT$. ∎

اثبات مثبت بودن t_{ii} : داریم

$$B_j = \alpha_j^{-1}\left(A_j - \sum_{i=1}^{j-1}(A_j, B_i)B_i\right) \quad , \; \circ < \alpha_j = \left\| A_j - \sum_{i=1}^{j-1}(A_j, B_i)B_i \right\|_2$$

$$\Rightarrow 1 = (B_j, B_j) = \alpha_j^{-1}\left((A_j, B_j) - \sum_{i=1}^{j-1}(A_j, B_i)(B_i, B_j)\right)$$

$$= \alpha_j^{-1}\left((A_j, B_j) - \sum_{i=1}^{j-1}(A_j, B_i)\,\delta_{ij}\right)$$

$$= \alpha_j^{-1}(A_j, B_j)$$

$$\Rightarrow (A_j, B_j) = \alpha_j > \circ \quad \Rightarrow t_{jj} = (A_j, B_j) = \alpha_j > \circ$$

بنابراین عناصر قطری T برابر زره و مثبت اند. ◀

مثال. با استفاده از الگوریتم گرام اشمیت، تجزیهٔ متعامد QR یک ماتریس زیر را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

حل. ستونهای A را به عنوان x_1، x_2 و x_3 در نظر می‌گیریم و الگوریتم QR را برای آنها بکار می‌بندیم (دقت میشود که x_iها مستقل خطی‌اند). لذا x_iها همان مثال صفحهٔ 115 هستند، u_iها های بدست آمده از گرام اشمیت به صورت زیرند:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} ; \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

ماتریس Q به صورت $Q = [u_1, u_2, u_3]$ است و ماتریس $R = (t_{ij})$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$t_{ij} = (x_j , u_i) \ , \ i \leq j \qquad , \ t_{ij} = 0, \ i > j$$

$$\Longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6/\sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}^{Q} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6/\sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix}}^{R}.$$

فصل پنجم: مسأله کمترین مربعات

یک کاربرد مهم تجزیه متعامد، مسأله کمترین مربعات برای یک دستگاه معادلات خطی است.

دستگاه m معادله و n مجهول

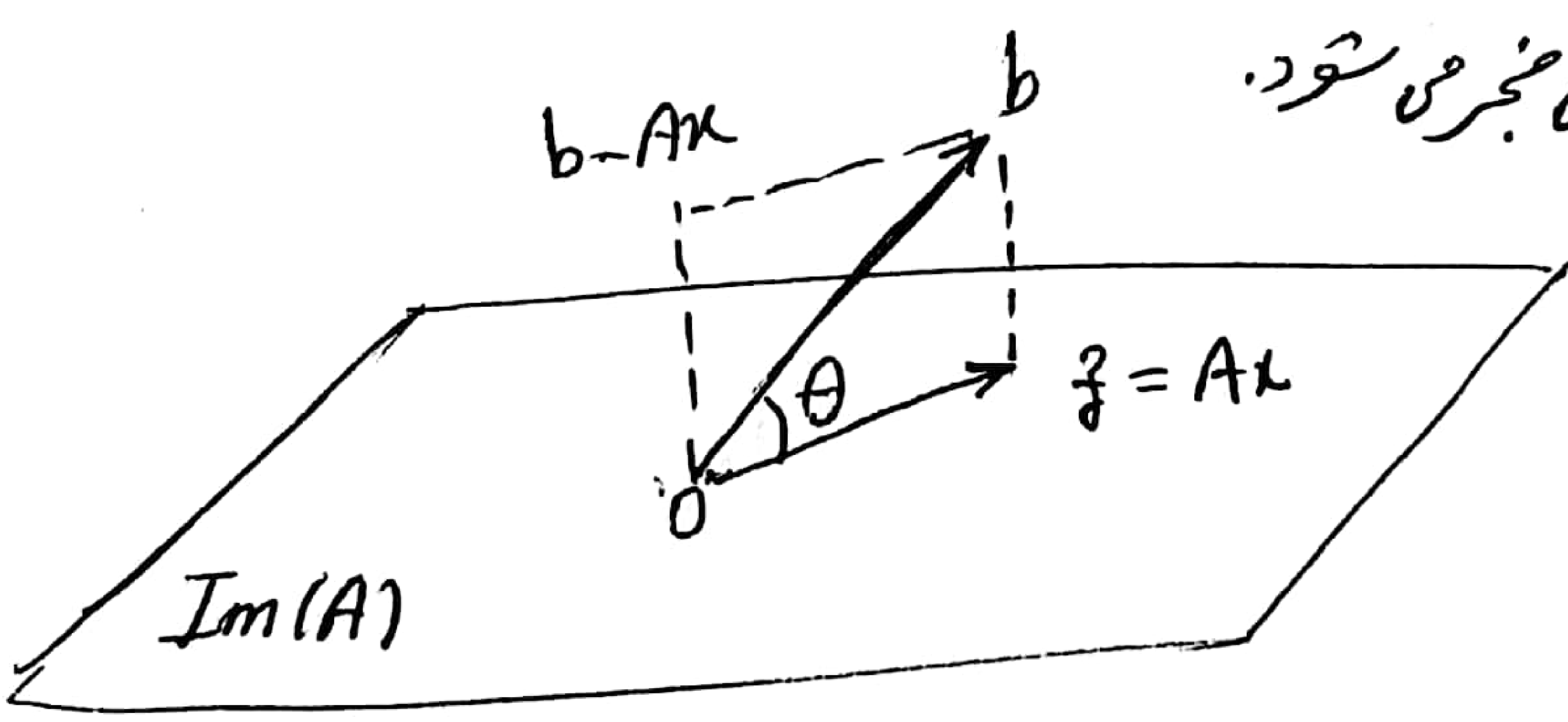
$$Ax = b \qquad (1)$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$، x یک بردار از $\mathbb{R}^n$ و b نیز برداری از $\mathbb{R}^m$ است. هدف یافتن برداری مانند x است طوری که Ax تا حد امکان به بردار b نزدیک باشد.

چندین نرم برداری برای اندازه‌گیری فاصله بین Ax و b وجود دارد اما ساده‌ترین انتخاب (که متناظر با نامگذاری حداقل مربعات نیز است) نرم برداری اقلیدسی است. بنابراین مسأله کمترین مربعات عبارت است از یافتن جوابی مانند $x \in \mathbb{R}^n$ برای مسأله مینیمم‌سازی زیر است

$$\|b - Ax\|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|b - Ay\| \qquad (2)$$

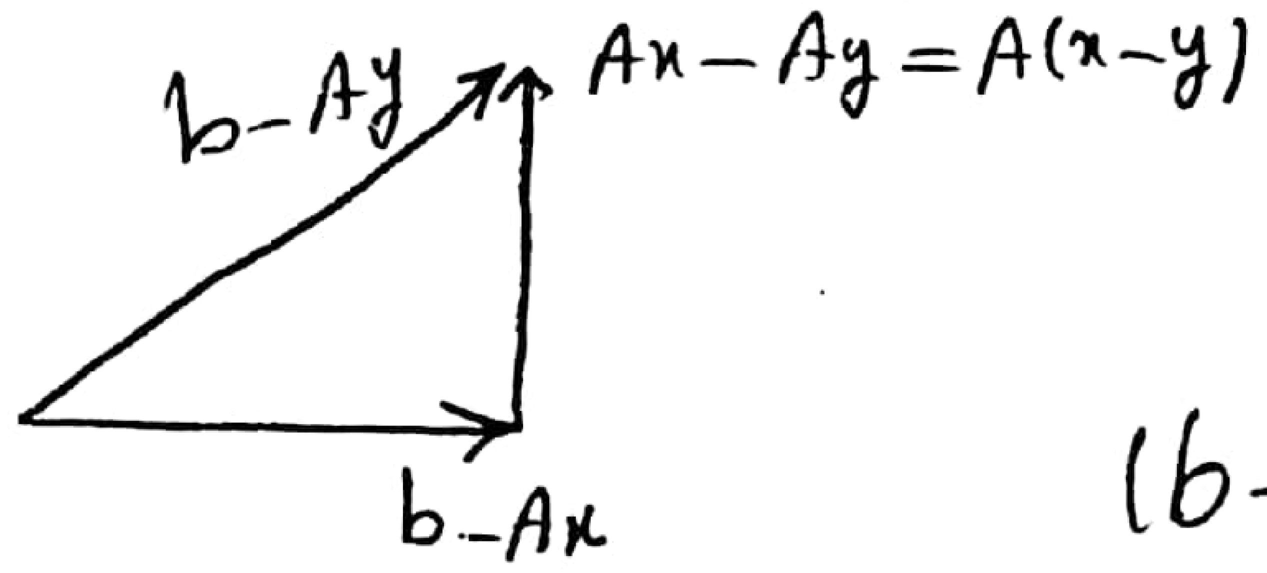
در حالت $m=n$، اگر A نامنفرد باشد آنگاه مینیمم‌ساز منحصربفرد $x = A^{-1}b$ وجود دارد و مقدار مینیمم نیز برابر صفر است. در این حالت، مسأله کمترین مربعات معادل حل یک دستگاه خطی است. اگر A منفرد باشد یا اگر $m \neq n$، آنگاه مفهوم حداقل مربعات به تعمیمی از حل دستگاه خطی در حالت ماتریس‌های منفرد یا غیرمربعی منجر می‌شود.



فرض کنید رتبه A برابر n باشد. هدف یافتن x ای است که بردار مانده $b-Ax$ را مینیمم سازد.

لم ۱. اگر x نقطه‌ای باشد بطوری که $A^*(Ax-b)=0$، آنگاه جواب مسئله کمترین مربعات (2) نیز است.

برهان. فرض کنید y نقطه‌ای دلخواه باشد. چون $A^*(Ax-b)=0$ لذا بردار $b-Ax$ بر بردارهای ستون‌های ماتریس A و در نتیجه بر فضای ستون‌های A عمود است. همچنین $z=A(x-y)$ در فضای ستون‌های A قرار دارد (چرا؟ می‌توان به صورت ترکیب خطی از ستون‌های A نوشت). بنابراین



$$(b-Ax,\ A(x-y))=0$$

و بنا به قضیه فیثاغورث داریم

$$\|b-Ay\|_2^2=\|b-Ax+A(x-y)\|_2^2=\|b-Ax\|_2^2+\|A(x-y)\|_2^2$$
$$\geq \|b-Ax\|_2^2$$

به عبارت دیگر، x جواب مسئله کمترین مربعات (2) است.

تبصره 1. اگر رتبه ماتریس $m\times n$، A برابر n باشد آنگاه A^*A نامنفرد است زیرا ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$\forall x\in\mathbb{C}^n,\quad x^*A^*Ax=(Ax)^*(Ax)=\|Ax\|_2^2\geq 0$$

حال اگر $x(\neq 0)\in\mathbb{C}^n$ آنگاه

$$Ax=\overset{\text{ستون‌های } A}{[a_1 \cdots a_n]}x=\sum_1^n x_i a_i \neq 0$$

($\{a_i\}$ مستقل خطی‌اند)

بنابراین به ازای $x \neq 0$، $Ax \neq 0$ و لذا $\|Ax\|_2^2 \neq 0$. در نتیجه

$$x^* A^* A x = \|Ax\|_2^2 > 0 \qquad (*)$$

حال اگر A^*A منفرد باشد

$$\exists\, x (\neq 0) \in \mathbb{C}^n,\quad A^*Ax = 0 \Longrightarrow x^*A^*Ax = 0$$

که در تناقض با $(*)$ است. لذا A^*A نامنفرد است.

تبصره 2. روش مستقیم برای حل مسأله کمترین مربعات متناظر با دستگاه $Ax=b$، استفاده از لم 1 است. بنابراین کمیت $\|Ax-b\|_2$ مینیمم خواهد شد اگر

$$A^*(Ax-b)=0$$

بنابر تبصره 1، اگر رتبه ماتریس $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ برابر n باشد، A^*A نامنفرد است و در این حالت دقیقاً یک جواب کمترین مربعات وجود دارد که به طور منحصر بفرد با حل دستگاه $n \times n$ و ناتکین

$$A^*Ax = A^*b \qquad (\text{معادلات نرمال})$$

بدست می آید.

برای حل مسأله کمترین مربعات می توان از تجزیه QR برای A که در آن Q یک ماتریس متعامد و R یک ماتریس بالامثلثی است استفاده کرد. در واقع داریم

$$A^*(Ax-b)=0 \Longrightarrow R^*Q^*(QRx-b)=0$$

$$\Longrightarrow R^*\underbrace{Q^*Q}_{I}Rx = R^*Q^*b \qquad (\text{یک ماتریس نامنفرد با عناصر قطری مثبت است } R^*)$$

$$\Longrightarrow Rx = Q^*b$$

با حل دستگاه بالامثلثی فوق با استفاده از الگوریتم جایگذاری پسرو بردار x بدست می آید.

مثال. جواب مساله کمترین مربعات زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ابتدا یک تجزیه QR برای A بدست می‌آوریم

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|_2} = \left(0, \tfrac{1}{\sqrt5}, \tfrac{2}{\sqrt5}\right)^T$$

$$B_2' = A_2 - (A_2, B_1)B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt5 \\ 2/\sqrt5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \frac{B_2'}{\|B_2'\|_2} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

$$R = (t_{ij}), \quad \begin{cases} t_{ij} = (A_j, B_i), & i \le j \\ t_{ij} = 0, & i > j \end{cases}$$

$$t_{11} = (A_1, B_1) = \sqrt5, \quad t_{12} = (A_2, B_1) = 2/\sqrt5, \quad t_{22} = (A_2, B_2) = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

لذا

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt5 & -2/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt5 & 1/\sqrt{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt5 & \frac{2}{\sqrt5} \\ 0 & \sqrt{30}/5 \end{pmatrix}$$

$$(A = QR)$$

بنابراین جواب مساله کمترین مربعات از حل دستگاه زیر بدست می آید

$$Rx = Q^{*}b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5}\, x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} x_2 = \sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{30}}{5} x_2 = \frac{5}{\sqrt{30}} \end{cases}$$

با استفاده از الگوریتم جایگذاری پسرو داریم

$$x_2 = \frac{5}{6}, \quad x_1 = \frac{2}{3}$$

تجزیه QR هاوس هولدر:

در اینجا، به تجزیه‌ی ماتریس mxn مانند A به QR می‌پردازیم که در آن Q یک ماتریس یکانی (متعامد در حالت حقیقی) mxm و R یک ماتریس بالا مثلثی mxn است. این کار را با استفاده از ماتریسهای هاوس هولدر انجام می‌دهیم.

ماتریسهای هاوس هولدر:

فرض کنید $v \in \mathbb{C}^n$ داده شده باشد. ماتریس nxn زیر را تعریف می‌کنیم

$$P = I - \frac{2vv^H}{\|v\|_2^2} \qquad (1)$$

ماتریس P ی تعریف شده در فوق، هرمیتی و یکانی است، زیرا

$$P^H = \left(I - \frac{2vv^H}{\|v\|_2^2}\right)^H = I - \frac{2(vv^H)^H}{\|v\|_2^2} = I - \frac{2vv^H}{\|v\|_2^2} = P$$

&

$$PP^H = \left(I - \frac{2vv^H}{\|v\|_2^2}\right)\left(I - \frac{2vv^H}{\|v\|_2^2}\right) = I - \frac{4vv^H}{\|v\|_2^2} + \frac{4(vv^H)(vv^H)}{\|v\|_2^4}$$

$$= I - \frac{4vv^H}{\|v\|_2^2} + \frac{4v\overbrace{(v^Hv)}^{\|v\|_2^2}v^H}{\|v\|_2^4} = I - \frac{4vv^H}{\|v\|_2^2} + \frac{4vv^H}{\|v\|_2^2}$$

$= I \Longrightarrow$ P یکانی است $(PP^H = I \ \& \ P = P^H \Rightarrow P^2 = I \ \& \ P^HP = I)$

ماتریس P و بردار v به ترتیب ماتریس انعکاس هاوس هولدر و بردار هاوس هولدر نامیده می‌شوند.

ماتریسهای هاوس هولدر برای صفر کردن بلوکی از مولفه‌های یک بردار داده شده‌ی $x \in \mathbb{R}^n$ استفاده می‌شوند
(حالت خاص: x حقیقی)

به ویژه اگر بخواهیم همه‌ی مولفه‌های x غیر از مولفه‌ی mام آن را صفر کنیم، بردار هاوس هولدر را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$v = x \pm \|x\|_2 e_m \qquad (2)$$

که در آن e_m به صورت زیر است

$$e_m = (0,0,\dots,\overset{\text{ام } m}{1},0,\dots,0)^T$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$v = x \pm \|x\|_2 e_m = [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m \pm \|x\|_2, x_{m+1}, \dots, x_n]^T$$

&

$$\|v\|_2^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \pm 2x_m\|x\|_2 + \|x\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 \pm 2x_m\|x\|_2$$

$$= 2\|x\|_2(\|x\|_2 \pm x_m)$$

&

$$vv^T = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{سطر } m\text{ام} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1(x_m \pm \|x\|_2) & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2(x_m \pm \|x\|_2) & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1(x_m \pm \|x\|_2) & x_2(x_m \pm \|x\|_2) & \cdots & (x_m \pm \|x\|_2)^2 & \cdots & x_n(x_m \pm \|x\|_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n(x_m \pm \|x\|_2) & \cdots & x_n^2 \end{bmatrix}$$

و ماتریس هاوس هولدر محاسبه شده با (1) به صورت زیر خواهد بود

$$P = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{سطر } m\text{ام} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1-\frac{x_1^2}{q} & \frac{-x_1x_2}{q} & \cdots & \frac{-x_1(x_m \pm \|x\|_2)}{q} & \cdots & \frac{-x_1x_n}{q} \\ \frac{-x_2x_1}{q} & 1-\frac{x_2^2}{q} & \cdots & \frac{-x_2(x_m \pm \|x\|_2)}{q} & \cdots & \frac{-x_2x_n}{q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{-x_1(x_m \pm \|x\|_2)}{q} & \frac{-x_2(x_m \pm \|x\|_2)}{q} & \cdots & 1-\frac{(x_m \pm \|x\|_2)^2}{q} & \cdots & \frac{-x_n(x_m \pm \|x\|_2)}{q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{-x_nx_1}{q} & \frac{-x_nx_2}{q} & \cdots & \frac{-x_n(x_m \pm \|x\|_2)}{q} & \cdots & 1-\frac{x_n^2}{q} \end{bmatrix} \quad \& \quad q = \|x\|_2(\|x\|_2 \pm x_m)$$

حال اگر بخواهیم $y=Px$ را محاسبه کنیم، داریم

$$\forall 1\le i\le n, i\ne m: \quad y_i = (Px)_i = \frac{-x_ix_1^2}{q} - \frac{x_ix_2^2}{q} - \dots + \left(1-\frac{x_i^2}{q}\right)x_i - \dots - \frac{x_ix_{m-1}^2}{q} - \frac{x_i(x_m \pm \|x\|_2)x_m}{q} - \dots - \frac{x_ix_n^2}{q}$$

$$= \frac{x_i(-x_1^2 - x_2^2 - \dots + (q - x_i^2) - \dots - x_{m-1}^2 - x_m^2 \mp x_m\|x\|_2 - \dots - x_n^2)}{q}$$

$$= \frac{x_i(\underbrace{-\|x\|_2^2 + q \mp x_m\|x\|_2}_{=-q})}{q} = 0$$

$$y_m = (Px)_m = \frac{-x_1^2(x_m \pm \|x\|_2)}{q} - \frac{(x_m \pm \|x\|_2)x_2^2}{q} - \dots - \frac{(x_m \pm \|x\|_2)x_{m-1}^2}{q} + x_m\left(1 - \frac{(x_m \pm \|x\|_2)^2}{q}\right) - \dots - \frac{(x_m \pm \|x\|_2)x_n^2}{q}$$

$$= \frac{(x_m \pm \|x\|_2)(-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{m-1}^2 - x_m^2 \mp x_m\|x\|_2 + \dots - x_n^2) + x_mq}{q}$$

$$= \frac{(x_m \pm \|x\|_2)(-\|x\|_2^2) \overbrace{\mp x_m \|x\|_2 (x_m \pm \|x\|_2)}^{=-q} + x_m q}{q}$$

$$= \frac{-\|x\|_2^2 (x_m \pm \|x\|_2)}{\|x\|_2 (\|x\|_2 \pm x_m)} = \mp \|x\|_2 .$$

بنابراین با تعریف ماتریس P در (1) خواهیم داشت

$$y = Px = [0,0,\dots,0,\overset{m\text{ام}}{\mp\|x\|_2},0,\dots,0]^T \qquad (3)$$

مثال. فرض کنید $x=(1,1,1,1)^T$ و $m=3$ (یعنی سومین مولفه‌ی x مخالف صفر باقی بماند و بقیه را صفر کنیم) در این صورت

$$\|x\|_2 = 2$$

$$v = x + \|x\|_2 e_3 = (1,1,3,1)^T, \quad \|v\|_2^2 = 12$$

$$vv^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = I - \frac{2vv^T}{\|v\|_2^2} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{بالای صفحه}]{\text{مستقیم و یا از (3) در}} Px = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تذکر: اگر برای x‌ای بخواهیم k مولفه‌ی اول x بدون تغییر باقی بماند در حالی که مولفه‌های $(k+2)$ام و بعد از آن برای این بردار به صفر تبدیل شود (مولفه‌ی $(k+1)$ام نیز تغییر کند اما نه به صفر بلکه به $\mp\|\hat{x}\|$)، در این صورت ماتریس هاوس‌هولدر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$P_{(k)} = \begin{bmatrix} \underset{k\times k}{I_k} & \underset{k\times(n-k)}{0} \\ \underset{(n-k)\times k}{0} & \underset{(n-k)\times(n-k)}{R_{n-k}} \end{bmatrix} \quad \& \quad R_{n-k} = I_{n-k} - \frac{2\,w^{(k)}(w^{(k)})^T}{\|w^{(k)}\|_2^2} \qquad (4)$$

که در آن I_k ماتریس همانی از مرتبه‌ی k، R_{n-k} ماتریس انعکاس هاوس‌هولدر از مرتبه‌ی $(n-k)$ متناظر با بردار $w^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k}$ است.

ص ۱۲۲.

بر طبق رابطه‌ی (2)، بردار هاوس هولدر به صورت زیر بدست می آید:

$$\omega^{(k)} = x^{(n-k)} \pm \|x^{(n-k)}\|_2 \, e_1^{(n-k)}$$

که $x^{(n-k)} \in R^{n-k}$ بردار متشکل از $(n-k)$ مولفه‌ی آخر x و $e_1^{(n-k)}$ اولین بردار یکه‌ی پایه‌ی استاندارد از R^{n-k} است.

مولفه‌های بردار تبدیل شده‌ی $y = P_{(k)}x$ به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} y_j = x_j \quad ; \ j = 1, \dots, k \\ y_j = 0 \quad ; \ j = k+2, \dots, n \\ y_{k+1} = \mp \|x^{(n-k)}\|_2 = \mp\sqrt{x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2} \end{cases}$$

مثال. فرض کنید $x = (1,2,3,4,5)^T$ و $k=1$. (یعنی میخواهیم مولفه‌های x_j، $j=3,4,5$ در بردار x را صفر کنیم و x_1 بدون تغییر باقی بماند)

$$x^{(n-1)} = (2,3,4,5)^T \ ; \ \|x^{(n-1)}\|_2 = \sqrt{4+9+16+25} = 7.3485$$

$$\omega^{(1)} = x^{(n-1)} \overset{+}{\ominus} \|x^{(n-1)}\| e_1^{(n-1)} = (-5.3485, 3, 4, 5)^T$$

$$\omega^{(1)}(\omega^{(1)})^T = \begin{bmatrix} 28.6065 & -16.0455 & -21.394 & -26.7425 \\ -16.0455 & 9 & 12 & 15 \\ -21.394 & 12 & 16 & 20 \\ -26.7425 & 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\|\omega^{(1)}\|_2^2 = 28.6065 + 9 + 16 + 25 = 78.6065$$

$$\frac{-2\omega^{(1)}(\omega^{(1)})^T}{\|\omega^{(1)}\|_2^2} = \begin{bmatrix} -0.7278 & 0.4082 & 0.5443 & 0.6804 \\ 0.4082 & -0.2290 & -0.3053 & -0.3816 \\ 0.5443 & -0.3053 & -0.4071 & -0.5089 \\ 0.6804 & -0.3816 & -0.5089 & -0.6361 \end{bmatrix}$$

$$P_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2722 & 0.4082 & 0.5443 & 0.6804 \\ 0 & 0.4082 & 0.7710 & -0.3053 & -0.3816 \\ 0 & 0.5443 & -0.3053 & 0.5929 & -0.5089 \\ 0 & 0.6804 & -0.3816 & -0.5089 & 0.3639 \end{bmatrix} \Longrightarrow y = P_{(1)}x = [1, \overbrace{7.3485}^{+\|x^{(n-1)}\|_2}, 0, 0, 0]^T$$

اگر مستقیم از $P_{(1)}(x)$ حساب کنیم بخاطر خطای گردکردن در عملیات 7.3482 بدست می آید.

مثال. بردار $x=(-1,1,-1,1)^T$ مفروض است. ماتریس هاوس هولدری بسازید که Px برداری به شکل

$$y=Px=(\alpha,0,0,0)^T$$

باشد و α را بیابید.

102-3

p.127

مثال. بردار $x=(-1,1,-1,1)^T$ مفروض است. ماتریس هاوس هولدر بسازید به طوری که Px برداری به شکل

$$y=Px=(\alpha,0,0,0)^T \quad و \quad \alpha>0$$

باشد و α را بدست آورید.

حل. ماتریس هاوس هولدر $P=I-\dfrac{2vv^T}{\|v\|_2^2}$ را که در آن

$$v=x\pm\|x\|_2 e_1$$

باشد را باید بسازیم:

$$\|x\|_2=\sqrt{1+1+1+1}=2$$

$$v=x\pm\|x\|_2e_1=(-3,1,-1,1)^T \quad \& \quad \|v\|_2^2=9+1+1+1=12$$

$$vv^T=\begin{bmatrix}9&-3&3&-3\\-3&1&-1&1\\3&-1&1&-1\\-3&1&-1&1\end{bmatrix} \Longrightarrow -2\frac{vv^T}{\|v\|_2^2}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-9&3&-3&3\\3&-1&1&-1\\-3&1&-1&1\\3&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$P=I-2\frac{vv^T}{\|v\|_2^2}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-3&3&-3&3\\3&5&1&-1\\-3&1&5&1\\3&-1&1&5\end{bmatrix}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$y=Px=\left[\|x\|_2,0,0,0\right]^T$$

$$=\left[2,0,0,0\right]^T$$

لذا $\alpha=2$ خواهد بود. (از جاگذاری P و x، Px را مستقیم حساب کنید)

مثال. بردار $x=(0,-2,2,1)^T$ مفروض است. ماتریس هاوس‌هولدر P را چنان بیابید که بردار $y=Px$ به شکل $y=(\alpha,\beta,0,0)^T$، $\beta<0$ باشد و α و β را بیابید.

$k=1,$

$x^{(n-1)}=(-2,2,1)^T,\quad \|x^{(n-1)}\|_2=3$

$w^{(n)}=x^{(n-1)}\oplus\|x^{(n-1)}\|_2\, e_1^{(n-1)}=(1,2,1)^T$

$\|w^{(n)}\|_2^2=6$

$$w^{(1)}w^{(1)T}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{2w^{(n)}w^{(1)T}}{\|w^{(n)}\|_2^2}=\begin{pmatrix}-1/3&-2/3&-1/3\\-2/3&-4/3&-2/3\\-1/3&-2/3&-1/3\end{pmatrix}$$

$$P_{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2/3&-2/3&-1/3\\0&-2/3&-1/3&-2/3\\0&-1/3&-2/3&2/3\end{pmatrix},\quad y=P_{(1)}x=(0,-3,0,0)^T$$

تجزیه‌ی QR:

قضیه. هر ماتریس مربعی A از مرتبه‌ی n را می‌توان به صورت QR تجزیه نمود که Q متعامد و R بالا مثلثی است.

این قضیه در ص 117 زمانی که رتبه‌ی A برابر تعداد ستون‌ها باشد ثابت شد. در اینجا قضیه برای ماتریس‌های مربعی ثابت می‌شود که (هیچ فرضی در مورد رتبه‌ی A نمی‌کنیم).

اثبات. ماتریس هاوس هولدر $P_{(1)}$ را طوری می‌سازیم که درایه‌های ستون اول زیر قطر A را صفر کند. در این صورت $P_{(1)}A$ به صورت زیر خواهد بود:

$$P_{(1)}A=\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس هاوس هولدر $P_{(2)}$ را طوری می‌سازیم که درایه‌های ستون دوم زیر قطر $P_{(1)}A$ را صفر کند بنابراین $P_{(2)}P_{(1)}A$ به صورت زیر است:

$$P_{(2)}P_{(1)}A=\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

با ادامه‌ی این روند، ماتریس $P_{(n-1)}$ را طوری می‌سازیم که درایه‌های ستون $(n-1)$ام زیر قطر $P_{(n-2)}\cdots P_{(2)}P_{(1)}A$ را صفر کند بنابراین $P_{(n-1)}P_{(n-2)}\cdots P_{(1)}A$ به صورت زیر خواهد بود:

$$P_{(n-1)}\cdots P_{(2)}P_{(1)}A=\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}\overset{(\text{ماتریس بالامثلثی})}{=}R$$

بنابراین چون ماتریس $P_{(n-1)}\cdots P_{(2)}P_{(1)}A$ ماتریسی بالا مثلثی است، آن را R می‌نامیم و از آنجا که هر ماتریس‌های هاوس‌هولدر $P_{(1)},\ldots,P_{(n-1)}$ متعامدند، بنابراین $P_{(n-1)}\cdots P_{(2)}P_{(1)}$ هم متعامد است و از طرفی

$$A=(P_{(n-1)}\cdots P_{(2)}P_{(1)})^{-1}R=(P_{(n-1)}\cdots P_{(2)}P_{(1)})^{T}R=P_{(1)}^{T}P_{(2)}^{T}\cdots P_{(n-1)}^{T}R$$

$$\overset{(\text{P ها متقارن‌اند})}{=}P_{(1)}P_{(2)}\cdots P_{(n-1)}R=QR$$

که در آن $Q=P_{(1)}P_{(2)}\cdots P_{(n-1)}$ متعامد است. ▲

مثال. تجزیه QR ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

فرض کنید $A\in M_4(\mathbb{R})$ دارای تجزیه‌ای به شکل QR باشد که در آن Q و R به ترتیب ماتریس‌های متعامد و بالا مثلثی هستند. با فرض ماتریس هاوس هولدر Q_1 تولید شده توسط بردار انعکاس هاوس هولدر v در ماتریس A داریم

$$A_2 = Q_1 A = 7\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$v = \frac{w}{\|w\|_2}, \quad w = (-10, 0, -2, -6)^T$$

$$\frac{2w^T A_2}{w^T w} = \left(-1, \frac{8}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

(الف) مطلوبست محاسبه ماتریس A.

$$A_2 = Q_1 A \Rightarrow A = Q_1^{-1} A_2 = Q_1^T A_2 = Q_1 A_2$$

$$= \left(I - \frac{2ww^T}{\|w\|_2^2}\right) A_2 = A_2 - w\left(\frac{2w^T}{w^T w} A_2\right)$$

$$= 7\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}\left(-1, \frac{8}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 9 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ -6 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&4\end{pmatrix}$ را درنظر بگیرید. ماتریس انعکاس هاوس هولدر P_1 را برای اولین ستون A را بیابید.

$$v=(1,1,1,1)^T-2(1,0,0,0)^T=(-1,1,1,1)^T$$

$$vv^T=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix},\quad \|v\|_2^2=4$$

$$P_1=I-\frac{2vv^T}{\|v\|_2^2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$P_1A=\begin{pmatrix}2&5\\0&-2\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

Problem 1:

Show that the Householder reflector $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$, with $\|\mathbf{w}\| = 1$, is symmetric and orthogonal. Find the eigenvalues and eigenvectors of $\mathbf{H}$.

SOLUTION:

Symmetry:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - 2\left(\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}$$

Orthogonality:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = \mathbf{H}^2 = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\right)$$
$$= \mathbf{I} - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} + 4\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} + 4\mathbf{w}\mathbf{I}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$$

Eigenvalues: Let us look for vectors $\mathbf{v}_i$ and numbers λ_i obeying $\mathbf{H}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$. First, suppose $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$:

$$\mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{v} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v} - 2\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

Hence the matrix $\mathbf{H}$ has one eigenvalue -1 with the corresponding eigenvector being parallel to $\mathbf{w}$.

Now, suppose $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$:

$$\mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{v} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

Hence any vector $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ is an eigenvectorof $\mathbf{H}$, and hence $\mathbf{H}$ has an eigenvalue 1 of multiplicity $n-1$ where n is the dimension of $\mathbf{H}$.

Problem 2:

Use Householder orthogonalization procedure to find the QR factorization of

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUTION:
Step 1:

$$B = A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = -\|\mathbf{b}_1\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}-1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^T\mathbf{v} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

$$F = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T/(\mathbf{v}^T\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad Q_1 = F = \begin{bmatrix} -\sqrt{1/2} & 0 & -\sqrt{1/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{1/2} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = Q_1 A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Step 2:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = -\|\mathbf{b}_1\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2(\sqrt{3}+1) \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}^T\mathbf{v} = 8\sqrt{3}(\sqrt{3}+1), \quad F = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T/(\mathbf{v}^T\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \\ \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} \end{bmatrix}$$

The results are

$$R = Q_2 A_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{1/2} & -\sqrt{1/3} & -\sqrt{1/6} \\ 0 & -\sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{1/2} & \sqrt{1/3} & \sqrt{1/6} \end{bmatrix}$$

روش‌های LR و QR برای تقریب مقادیر ویژهٔ A:

با هر یک از این دو روش می‌توان مقادیر ویژهٔ یک ماتریس مربعی دلخواه را تحت شرایط معینی بدست آورد:

ابتدا روش LR را تشریح می‌کنیم:

روش LR:

برای محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس مفروض A، قرار می‌دهیم $A_1=A$ و

for $i=1,2,\dots$

$$A_i = L_i R_i$$

$$A_{i+1} = R_i L_i$$

که L_i و R_i به ترتیب ماتریس‌های پایین مثلثی و بالا مثلثی در تجزیهٔ A_i می‌باشند، و درایه‌های قطری L_i برابر یک هستند. در این صورت A_i و A_{i+1} متشابه‌اند. زیرا: اولاً L_i معکوس پذیر است (چون پایین مثلثی با عناصر قطری مخالف صفر و برابر یک است) و ثانیاً داریم

$$A_{i+1} = R_i L_i \Longrightarrow L_i A_{i+1} = \overbrace{L_i R_i}^{A_i} L_i = A_i L_i$$

$$\Longrightarrow A_{i+1} = L_i^{-1} A_i L_i$$

بنابراین مقادیر ویژهٔ A همان مقادیر ویژهٔ A_i است (به ازای هر i).

می‌توان ثابت کرد که اگر همهٔ تجزیه‌های $A_i=L_iR_i$ موجود باشند، و

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

آنگاه

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \cdots & * \\ & \lambda_2 & * \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر، دنبالهٔ A_i به یک ماتریس بالا مثلثی که درایه‌های روی قطر آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هستند میل می‌کند و $\lim_{i\to\infty} L_i = I$

مثال. مقادیر ویژه‌ی ماتریس زیر را با روش تکراری LR تقریب بزنید.

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

حل. داریم $m_{12}=\frac{1}{9}$، ولذا

$$A=A_1=L_1R_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

حال تعریف می‌کنیم

$$A_2=R_1L_1=\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & \frac{10}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{89}{9} & 8 \\ \frac{10}{81} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

سپس A_2 را به صورت L_2R_2 تجزیه می‌کنیم

$$A_2=L_2R_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{10}{801} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{89}{9} & 8 \\ 0 & \frac{810}{801} \end{bmatrix}$$

و قرار می‌دهیم $A_3=R_2L_2$. با ادامه‌ی این روند، در تکرار 5 داریم،

$$A_5=\begin{bmatrix} 9.9999 & 8.0000 \\ 0.0001 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

که تقریباً بالا مثلثی است. پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از:

$$\lambda_1 \cong 9.9999 \quad \& \quad \lambda_2=1.0001$$

(مقادیر ویژه‌ی دقیق A عبارتند از $\lambda_1=10$ و $\lambda_2=1$.) ▲

روش QR :

متداولترین روش برای محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس دلخواه A، روش QR است. در این روش قرار می‌دهیم $A_1=A$، و دنباله‌ای از ماتریسهای $\{A_i\}$ توسط الگوریتم زیر تولید می‌کنیم:

$$\text{for } i=1,2,\ldots$$
$$A_i=Q_iR_i$$
$$A_{i+1}=R_iQ_i$$

که Q_i و R_i به ترتیب ماتریسهای متعامد و بالامثلثی در تجزیه‌ی A_i هستند. در این صورت A_i و A_{i+1} متشابه‌اند زیرا

$$Q_iA_{i+1}=\overbrace{Q_iR_i}^{=A_i}Q_i=A_iQ_i \xrightarrow{\text{ماتریس } Q_i \text{ متعامد است}} A_{i+1}=Q_i^{-1}A_iQ_i$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی $A(=A_1)$ همان مقادیر ویژه‌ی A_i به ازای هر i، هستند.

در اینجا نیز می‌توان ثابت کرد که تحت شرایط معینی، از جمله اگر مقادیر ویژه‌ی A در شرط

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_n|>0$$

صدق کند، آنگاه

$$\lim_{i\to\infty}A_i=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ & \lambda_2 & \cdots & *\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

مثال. مثال قبل را با روش تکراری QR انجام دهید:

$$A=\begin{bmatrix}9 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

تجزیه‌ی مقدار تکین و معکوس تعمیم یافته (شبه معکوس):

تجزیه‌ی مقدار تکین (Singular Value Decomposition) یا SVD یکی دیگر از تجزیه‌های ماتریسی است که در حالت کلی برای ماتریس‌های مستطیلی بکار می‌رود. بخاطر مفید بودن SVD در یافتن معکوس تعمیم یافته‌ی یک ماتریس تکین و همچنین کاربردهای فراوان آن در پردازش تصویر، این تجزیه‌ی ماتریسی در نظریه‌ی ماتریس‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

مطالعه بر روی این تجزیه را با قضیه‌ای که وجود و شکل آن را توضیح می‌دهد، آغاز می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$. ماتریس‌های یکانی $U\in\mathbb{C}^{m\times m}$ و $V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ چنان موجودند که

$$U^HAV = \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_p)\in\mathbb{C}^{m\times n}, \quad p=\min(m,n)$$

که در آن $\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_p\geq 0$. (فرمول اخیر SVDی A نامیده می‌شود و اعداد σ_i (یا $\sigma_i(A)$) مقادیر تکین A نامیده می‌شوند).

اثبات. ماتریس A^HA یک ماتریس $n\times n$ و هرمیتی است و همچنین داریم

$$\forall x\in\mathbb{C}^n:\ x^HA^HAx = (Ax)^H(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

و لذا مقادیر ویژه‌ی A^HA نامنفی‌اند (زیرا اگر λ مقدار ویژه‌ی دلخواهی از A^HA باشد داریم

$$0\leq x^HA^HAx = (A^HAx,x) = (x,(A^HA)^Hx) = (x,A^HAx) = (x,\lambda x) = \bar{\lambda}(x,x) = \bar{\lambda}\|x\|_2^2$$

چون $\|x\|_2^2$ عددی حقیقی و مثبت است، بنابراین $\lambda\in\mathbb{R}$ و $\lambda\geq 0$) فرض کنید این مقادیر ویژه با $\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2$ نشان داده شوند (در این لیست هر σ_i^2 طبق چندگانگی‌اش به عنوان ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه تکرار شده است.)

بعلاوه ویژه‌ها را به گونه‌ای مرتب کرده‌ام که $\sigma_1^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2$ مثبت و $\sigma_{r+1}^2, \dots, \sigma_n^2$ صفر باشند. فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه‌ای یکامتعامد از بردارهای ویژه‌ی A^HA باشد (این مجموعه را می‌توان با استفاده از الگوریتم گرام اشمیت تولید کرد اگر n بردار ویژه‌ی مستقل خطی نداشته باشیم با استفاده از این الگوریتم می‌توانیم به n بردار یکامتعامد توسیع دهیم؛ (مثال ۶ را ببینید)) که به گونه‌ای مرتب شده‌اند که

$$A^HAv_i = \sigma_i^2 v_i$$

آنگاه

$$\|Av_i\|_2^2 = v_i^H A^H A v_i = v_i^H \cdot \sigma_i^2 v_i = \sigma_i^2$$

این نشان می‌دهد که $\overset{(**)}{Av_i = 0}$ اگر $i \geq r+1$. ملاحظه می‌کنیم که

$$r = \operatorname{rank}(A^HA) \leq \min\{\operatorname{rank}(A^H), \operatorname{rank}(A)\} \leq \min(m,n)$$

ماتریس $n\times n$ یکانی V را که ستون‌هایش $v_1, v_2, \dots, v_n$ هستند، تشکیل می‌دهیم. سپس تعریف می‌کنیم

$$u_i = \sigma_i^{-1} A v_i \quad , \quad i=1,2,\dots,r \qquad (*)$$

این‌ها یک دستگاه یکامتعامد تشکیل می‌دهند زیرا برای $1\leq i,j \leq r$ داریم

$$u_i^H u_j = \sigma_i^{-1}(Av_i)^H \cdot \sigma_j^{-1}(Av_j) = (\sigma_i\sigma_j)^{-1}(v_i^H A^H A v_j) = (\sigma_i\sigma_j)^{-1}(v_i^H \sigma_j^2 v_j)$$
$$= \sigma_i^{-1}\sigma_j \delta_{ij} = \delta_{ij}$$

بردارهای اضافی u_i را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ یک پایه‌ی یکامتعامد برای $\mathbb{C}^{m\times m}$ تشکیل دهند. فرض کنید U ماتریس $m\times m$ باشد که ستون‌هایش $u_1, \dots, u_m$ باشند و فرض کنید Σ ماتریس $m\times n$ بوده که عناصر روی قطرش $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ و بقیه صفر باشند. آنگاه داریم

$$A = U\Sigma V^H$$

یا

$$U^H A V = \Sigma,$$

زیرا

$$(U^H A V)_{ij} = u_i^H A v_j \overset{(**)}{\underset{(*)}{=}} \begin{cases} 0 & ; j \geq r+1 \\ u_i^H \cdot \sigma_j u_j = \sigma_j \delta_{ij} & ; j < r \end{cases} = \Sigma_{ij}.$$

▲

تبصره ۱: برای مقادیر تکین A داریم

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H A)} \quad , i=1,\dots,n$$

زیرا

$$\exists \overset{\text{یکانی}}{U,V} : A = U\Sigma V^H \ \& \ A^H = V\Sigma^T U^H$$

$$\xRightarrow{U \text{ و } V \text{ یکانی}} A^H A = V\Sigma^T\Sigma V^H \overset{\text{یکانی } V}{=} V\Sigma^T\Sigma V^{-1}$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی $A^H A$ و ماتریس $\Sigma^T\Sigma$ یکسانند (چون متشابه‌اند). ماتریس $\Sigma^T\Sigma$ ماتریسی $n\times n$ قطری است که عناصر روی قطر آن σ_i^2 هستند، بنابراین

$$\sigma_i^2(A) = \lambda_i(A^H A) \quad , i=1,\dots,n$$

$$\xRightarrow{\sigma_i \text{ها نامنفی‌اند}} \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H A)}.$$

تبصره ۲: اگر U و V ماتریس‌های یکانی معرفی شده در SVD باشند، داریم

$$AA^H = U\Sigma\Sigma^T U^H$$

$$\xRightarrow{\text{یکانی } U} AA^H U = U\underbrace{\Sigma\Sigma^T}_{\text{ماتریس } m\times m \text{ قطری با عناصر } \sigma_i^2}$$

$$\Longrightarrow AA^H u_i = \sigma_i^2 u_i$$

بنابراین ستون‌های ماتریس U، همان بردارهای ویژه‌ی ماتریس AA^H می‌باشند. بنابراین ستون‌های U در نتیجه U بطور یکتا بدست نمی‌آیند. (بطور مشابه ستون‌های V بردارهای ویژه‌ی $A^H A$ هستند)

(چرا که ما اینطور V را ساختیم)

تعریف 3. ستونهای U را "بردارهای تکین چپ A" و ستونهای V را "بردارهای تکین راست A" می‌نامند.

تعریف 4: در تفسیر SVD، اگر $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ هرمیتی باشد و $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی A باشند در این صورت مقادیر تکین A برابر با قدرمطلق (اندازه‌ی) مقادیر ویژه‌ی A است، یعنی

$$A \text{ هرمیتی} \Rightarrow A^H A = A^2 \Longrightarrow \sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i| \,, \quad i=1,\dots,n$$

تعریف 5: اگر

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$$

در این صورت رتبه‌ی A برابر r است و هسته‌ی A برابر با فضای تولید شده توسط بردارهای ستونی $\{v_{r+1},\dots,v_n\}$ از V است و برد A برابر فضای تولید شده از بردارهای ستونی $\{u_1,\dots,u_r\}$ از U می‌باشد.

مثال. مقادیر تکین ماتریس زیر را بیابید

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

حل:

$$A^H A = A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی $A^H A$ عبارتند از $\lambda_1 = 6$ ، $\lambda_2 = 1$. لذا مقادیر تکین A عبارتند از

$$\sigma_1 = \sqrt{6} \,, \quad \sigma_2 = 1.$$

مثال. SVDی ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 6 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

حل:

$$A^HA=A^TA=\begin{bmatrix}40 & 34 & 14\\ 34 & 37 & 20\\ 14 & 20 & 13\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی A^HA عبارتند از $\lambda_1=81$، $\lambda_2=9$ و $\lambda_3=0$. بنابراین مقادیر تکین A عبارتند از

$$\sigma_1=9\ ,\quad \sigma_2=3,\quad \sigma_3=0$$

بردارهای ویژه‌ی A^HA متناظر با مقادیر ویژه‌ی λ_1، λ_2 و λ_3 عبارتند از

$$v_1'=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\quad v_2'=\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix},\quad v_3'=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$$

چون A^TA متقارن (هرمیتی) است و λ_1، λ_2 و λ_3 متمایزند، بنابراین بردارهای ویژه‌ی نظیر به λ_1، λ_2 و λ_3 متعامدند (قضیه مربوط). حال اگر این بردارهای ویژه را یکه کنیم، ستونهای V در SVD بدست می‌آیند بنابراین

$$V=\begin{bmatrix}2/3 & -2/3 & 1/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\end{bmatrix}.$$

اکنون $U_{2\times2}$ را می‌سازیم. ستونهای این ماتریس (بنابه روند اثبات در ص 136 و رابطه‌ی (*) در آن صفحه) از رابطه‌ی زیر بدست می‌آیند:

$$u_i=\frac{1}{\sigma_i}Av_i\quad ;\ i=1,2$$

بنابراین

$$u_1=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 6 & 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\qquad u_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 6 & 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$U=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

و سرانجام ماتریس Σ به صورت زیر است

$$\Sigma=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

معکوس تعمیم یافته یا شبه معکوس:

برای یک ماتریس $m\times n$ به شکل

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & 0 \\ & & \ddots \sigma_r & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots 0 \end{bmatrix}$$

که در آن هر σ_i مثبت است، ماتریس $n\times m$ شبه معکوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Sigma^{\dagger} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & \\ & \sigma_2^{-1} & & & 0 \\ & & \ddots \sigma_r^{-1} & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots 0 \end{bmatrix}$$

شبه معکوس ماتریس کلی A که دارای SVD ی

$$A = U\Sigma V^H$$

است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{\dagger} = V\Sigma^{\dagger}U^H.$$

اگرچه SVD ی یک ماتریس یکتا نیست ولی شبه معکوس یک ماتریس به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود. (کینکید ص 412)

مثال. شبه معکوس ماتریس مثال صفحه‌ی 139 را بیابید.

حل. در آن مثال، $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ و SVD به صورت زیر بدست آمد

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}}_{V^T}$$

بنابراین

$$A^{\dagger} = V\Sigma^{\dagger}U^H = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 & 2/27 \\ 1/9 & 2/27 \\ 2/9 & 1/27 \end{bmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^TA=\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 9, 25$$

$$(A^TA-25I)u_1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_{21}=0 \Rightarrow \begin{cases} u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(A^TA-16I)u_3=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_{13}=u_{33}=0 \Rightarrow u_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1=\frac{1}{5}Au_1=(3/5 \quad -4/5 \quad 0)^T \Rightarrow V=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2=(4/5 \quad 3/5 \quad 0)^T, \quad v_3=(0 \quad 0 \quad 1)$$

$$\frac{1}{5}Au_2 \qquad \frac{1}{3}Au_3$$

$$\tilde{\Sigma}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A=V\tilde{\Sigma}U^*$$

$$|A|=\pm\prod_{1}^{3}\mu_i=\pm(5\times5\times3)=\pm75$$

$$A^\dagger=U\tilde{\Sigma}^\dagger V^*=\begin{pmatrix} 3/25 & -4/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 4/25 & 3/25 & 0 \end{pmatrix}$$