

به نام خدا



تمرینات درس ریاضیات عمومی ۲ - رشته مهندسی مکانیک
سری سوم - توابع چندمتغیره (حد و پیوستگی، مشتقات جزئی)

مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۰۲/۲۴

مدّرس: حسینی

(۱) حد توابع زیر را در نقاط داده شده، حساب کنید یا دلیل عدم وجود آن را توضیح دهید.

$$(i) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \frac{x \sin y - y \cos z}{|x| + |y| + |z|}, \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$(iii) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} \frac{(x+1)^3 (y-1)^2}{(x+1)^6 + (y-1)^4 + z^2}, \quad (iv) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin \frac{1}{x}.$$

(۲) فرض کنید

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

در این صورت، $\frac{\partial f}{\partial z}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ در $(0, 0, 0)$ را بیابید. آیا f در $(0, 0, 0)$ پیوسته است؟ در مورد پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial z}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ در $(0, 0, 0)$ نیز بحث کنید.

(۳) تابع با ضابطه $f(x, y, z) = (x^2 + z^2) \sin \frac{\pi xy}{4} + yz^2$ و نقطه $P_0(1, 1, -1)$ را در نظر بگیرید

(الف) گرادیان f در P_0 را بیابید.

(ب) معادله صفحه مماس در P_0 بر سطح تراز f مار بر P_0 را بیابید.

(پ) اگر یک پرنده از P_0 با تندی ۵ عبور کند و مستقیماً به سوی نقطه $(2, -1, 1)$ برود، میزان تغییر f دیده شده توسط پرنده وقتی از P_0 می‌گذرد چقدر است؟

(ت) پرنده در چه جهتی از P_0 با تندی ۵ پرواز کند که بیشترین میزان افزایش f را تجربه کند.

(۴) مشتق جهتی تابع $x^2 + y^2$ را در نقطه $(1, 1)$ و در جهت منحنی $y = \sqrt{x}$ بیابید.

(۵) فرض کنید

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(الف) مقدار $\vec{\nabla} f(0, 0)$ را بیابید.

(ب) با استفاده از تعریف مشتق جهتی، مقدار $\vec{\nabla}_u f(0, 0)$ را که در آن $u = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$ ، حساب کنید.

۶) نشان دهید که بر حسب مختصات قطبی (r, θ) ، گرادیان تابع $f(r, \theta)$ مساوی است با

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{\theta}$$

که در آن \vec{r} برداری یکه در جهت بردار موضع $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{\theta}$ برداری یکه عمود بر \vec{r} در جهت افزایش θ است.

۷) حجم بزرگترین مکعب مستطیلی که اضلاع آن موازی محورهای مختصات بوده و در بیضی گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ قابل محاط است را بیابید.

۸) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$$

تحت قید $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ را بیابید.

۹) تابع $f(x, y) = x^2 + xy^3$ را در نظر بگیرید.

(الف) چندجمله‌ای تیلور درجه یک تابع $f(x, y)$ حول نقطه $(2, 1)$ را به دست آورید؛

(ب) با استفاده از قسمت (الف) تقریبی برای $f(1/9, 1/1)$ بیابید؛

(پ) کران بالایی برای خطای تقریب خطی به دست آورید در صورتی که داشته باشیم

$$|x - 2| \leq 0.1, \quad |y - 1| \leq 0.1.$$

«موفق باشید»