

به نام خدا



تمرینات درس معادلات دیفرانسیل جزئی- رشته ریاضیات و کاربردها
سری سوم- روش جداسازی متغیرها، معادلات موج، گرما و لاپلاس

مدرس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۱۰/۱۴

(۱) با استفاده از روش جداسازی متغیرها جواب معادله دیفرانسیل جزئی

$$u_t = 3(u_{xx} + 5u), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

با شرایط مرزی

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

و شرایط اولیه

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

را بیابید.

(۲) تغییر مکان اولیه یک تار نامحدود دو طرفه عبارت است از $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و $x^2 < \infty$. سرعت اولیه مناسبی برای تار پیشنهاد کنید در صورتی که بخواهیم حرکتش منحصر به موجی باشد که به راست حرکت می‌کند.

(۳) اگر $u(x, t)$ جواب مساله

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

باشد آن‌گاه مقدار $u(\frac{1}{4}, 3)$ را به دست آورید.

(۴) (الف) جواب مساله دیریکله زیر را به دست آورید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = f(x).$$

(ب) نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

۵) جواب معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0,$$

با شرایط مرزی

$$u(1, \theta) = 0,$$

$$u(2, \theta) = f(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}, \quad |\theta| \leq \pi,$$

که در آن f یک تابع 2π -متناوب است، را در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

۶) جواب معادله لاپلاس زیر را با استفاده از شرایط مرزی داده شده به دست آورید.

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 < a < \rho < b,$$

$$u(a, \phi) = 1 + \cos \phi,$$

$$u(b, \phi) = \cos(2\phi).$$

۷) جواب معادله دیفرانسیل جزئی زیر را بیابید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 1,$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = xe^{-|x|}.$$

«موفق باشید»