

به نام خدا



تمرینات درس جبر خطی عددی- رشته ریاضیات و کاربردها سری سوم- روش های تکراری تقریب مقادیر ویژه

مدرس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۱۰/۲۴

(الف) نشان دهید اگر ماتریس A با تبدیل مشابه AP^{-1} قطری شود و B یک ماتریس دلخواه باشد آن گاه مقادیر ویژه $A+B$ در اجتماع دایره های

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_k| \leq \kappa_\infty(P) \|B\|_\infty\},$$

قرار دارند که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A بوده و $\kappa_\infty(P)$ عدد حالت ماتریس P است.

(ب) نشان دهید همه مقادیر ویژه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

مثبت هستند.

(الف) فرض کنید $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$ و $b \in \mathbb{R}^m$. نشان دهید بردار $X \in \mathbb{R}^n$ یک جواب مساله کمترین مربعات

$$\|AX - b\|^2 = \min_{Y \in \mathbb{R}^n} \|AY - b\|^2, \quad Y \in \mathbb{R}^n,$$

است اگر و تنها اگر در معادلات نرمال $A^H AX = A^H b$ ، صدق کند. همچنین، نشان دهید مساله دارای جواب یکتاست اگر رتبه A برابر n باشد.

(ب) جواب مساله را بر حسب تجزیه مقدار تکین A به دست آورید.

(پ) مساله کمترین مربعات منظم شده

$$\|AX - b\|^2 = \min_{Y \in \mathbb{R}^n} (\|AY - b\|^2 + \lambda^2 \|Y\|^2), \quad Y \in \mathbb{R}^n,$$

را در نظر بگیرید. معادلات نرمال برای این مساله را به دست آورید و با استفاده از آن نشان دهید مساله صرف نظر از رتبه A دارای جواب است هرگاه $\lambda \neq 0$. (راهنمایی: مساله کمترین مربعات منظم را با استفاده از یک دستگاه خطی $(m+n) \times n$ بعدی در قالب مساله قسمت (الف) بنویسید.)

(ت) جواب مساله منظم شده را بر حسب تجزیه مقدار تکین A به دست آورید.

(۳) (الف) نشان دهید ماتریس انعکاس هاوس-هولدر $H = I - 2ww^T$ که در آن $\|w\| = 1$ ، ماتریسی متقارن و متعامد است.

(ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس H را بیابید.

(۴) ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

با استفاده از روش تکراری توانی، تقریبی برای بزرگترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر آن بیابید. حدس اولیه را $X^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ در نظر بگیرید و سه تکرار انجام دهید.

(۵) تجزیه QR ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

را با استفاده از الگوریتم متعامدسازی گرام-اشمیت به دست آورید.

(۶) یک تجزیه مقدار تکین برای ماتریس زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

«موفق باشید»