



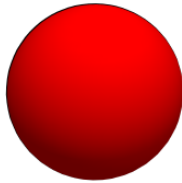
تمرینات درس ریاضیات عمومی ۱ - رشته ریاضیات و کاربردها

مهلت تحویل: ۱۴۰۴/۰۹/۳۰

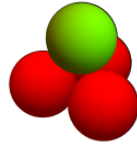
مدرس: حسینی

(۱) اگر پرتقال‌ها را روی یکدیگر بچینیم، به اعداد چهاروجهی می‌رسیم. عدد بعدی را بیابید؟

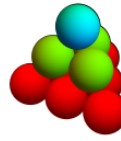
۱ ۴ ۱۰ ۲۰ ۳۵ ۵۶ ۸۴ ۱۲۰ ...



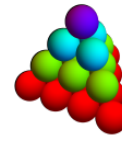
n=1



n=2



n=3



n=4

(۲) وقتی اعداد طبیعی اول را با هم جمع می‌کنیم، به اعدادی می‌رسیم که به آنها اعداد مثلثی گفته می‌شود. این دنباله یک تابع روی اعداد طبیعی تعریف می‌کند. به عنوان مثال،

$$f(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

فرمولی برای $f(x)$ بیابید.

۱ ۳ ۶ ۱۰ ۱۵ ۲۱ ۲۸ ۳۶ ۴۵ ...



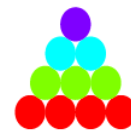
n=1



n=2



n=3



n=4

(۳) حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

(i) $\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$

(ii) $\frac{(1 + i\sqrt{3})^8}{2^7(-1 + i\sqrt{3})}$

(iii) $(z - \bar{z})(z^2 - \bar{z}^2) \cdots (z^n - \bar{z}^n)$

(iv) $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$

(۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$(i) z(\bar{z} + 2) = 3, \quad (ii) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right) = 1, \quad (iii) \operatorname{Re}(z^2) < 0.$$

(۵) الف) فرض کنید z_0, z_1 و z_2 سه نقطه متمایز در صفحه اعداد مختلط باشند. نشان دهید مثلث تشکیل شده به وسیله این سه نقطه یک مثلث متساوی الساقین با زاویه قائمه در رأس z_0 است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \pm i$$

ب) همه اعداد مختلط z را بیابید به طوری که مثلث تشکیل شده به وسیله نقاط $1, z$ و z^2 یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین باشد.

(۶) حدود زیر را حساب کنید.

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [1000x]}{x},$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$$

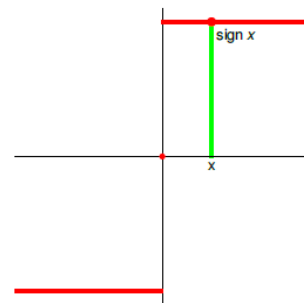
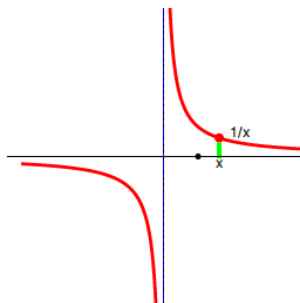
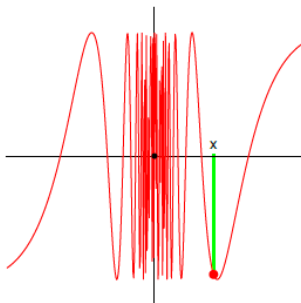
$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right)$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - 2 \cos x}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 \sqrt{x} \ln(1 + 3x)}{(\tan^{-1} \sqrt{x})^2 (e^{5\sqrt{x}} - 1)}$$

(۷) چندین مکانیسم برای ناپیوستگی وجود دارد. یک تابع می‌تواند یک باره پرش کند، به سمت بی نهایت برود یا نوسانی زشت داشته باشد. هر سه حالت ناشی از تقسیم بر صفر در جایی هستند.

Nice Guys	Good,Bad,Ugly Guys
$x^2 + 4x + 6$	$1/x$ at 0
$\sin(x), \cos(x)$	$\tan(x)$ at $\pi/2$
$\exp(x)$	$\log x $ at 0
$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$	$\frac{1}{\cos(x)}$ at $\pi/2$



مشخص کنید کدامیک از توابع زیر پیوسته هستند؟

(i) $f(x) = x^2 + x^2 \sin(1/x^2)$

(ii) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(iii) $f(x) = |x^3|/x^2$

(iv) $f(x) = |x|^2/x$

(v) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

(vi) $f(x) = \frac{1}{\log|1/x|}$

(vii) $f(x) = \log(\log|x|)$

(viii) $f(x) = 1/(1+|x|)$

(ix) $f(x) = 1/(1-|x|)$

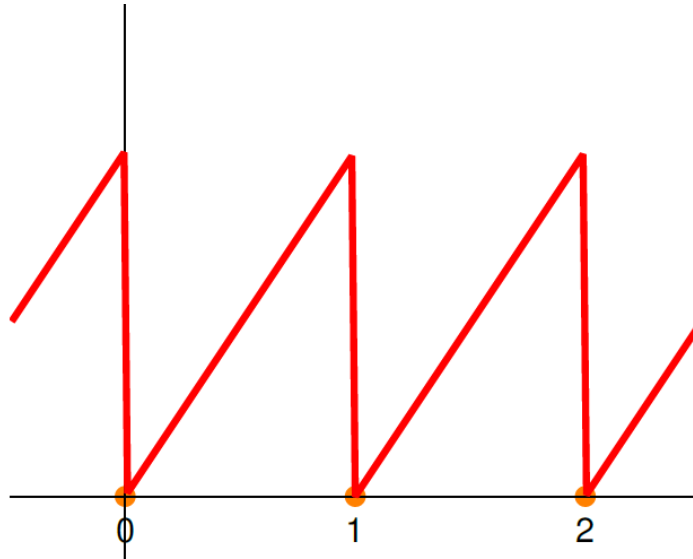
(x) $f(x) = x^2/\sin x$

(xi) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

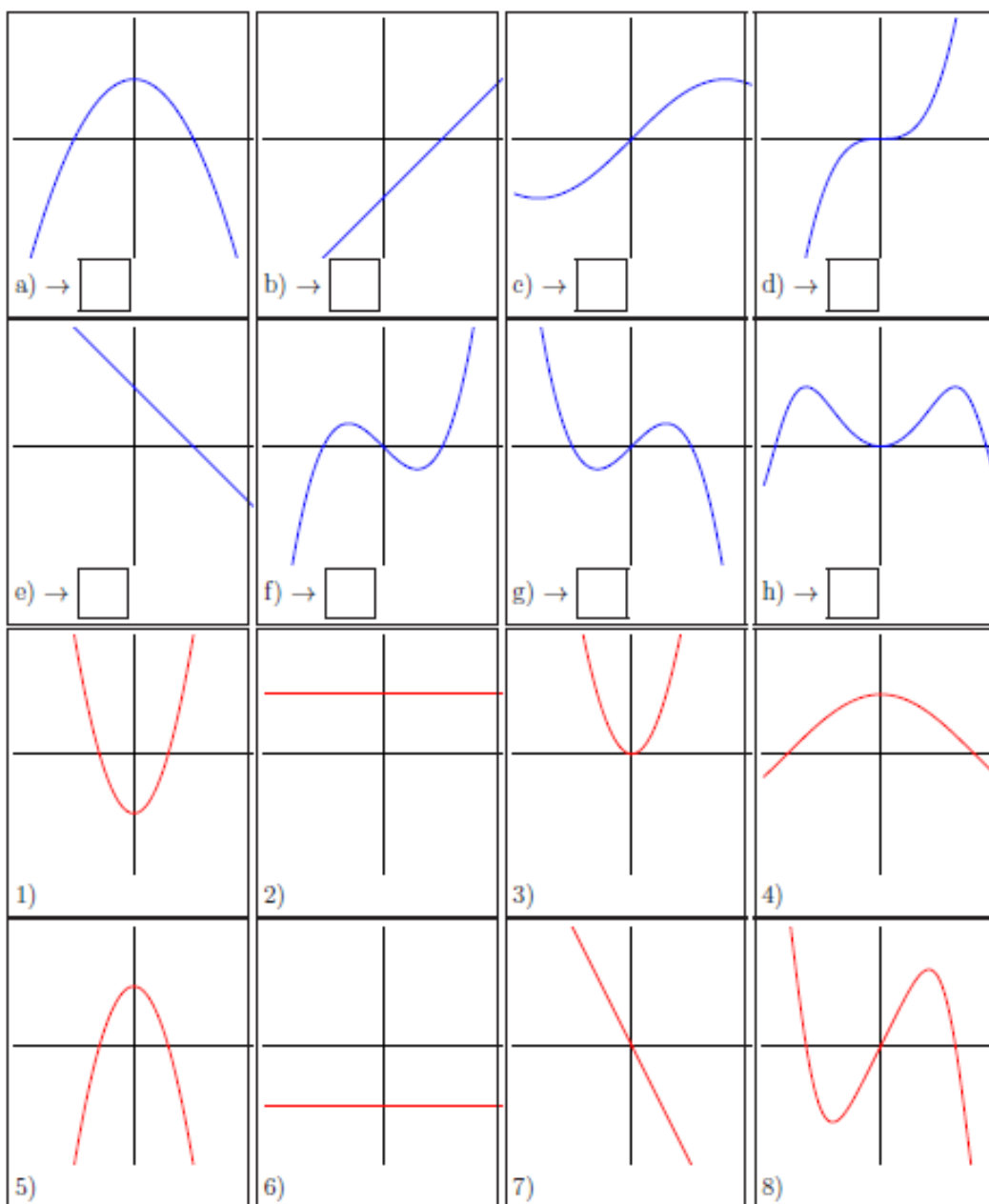
(xii) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

۸) امروز، دمای متوسط حدود ۹ درجه سانتی‌گراد است و دمای دیروز حدود ۱۴ درجه سانتی‌گراد بود. آیا می‌توان نتیجه گرفت که در طول شب، لحظه‌ای وجود داشته است که دما دقیقاً ۱۰ درجه سانتی‌گراد بوده باشد؟

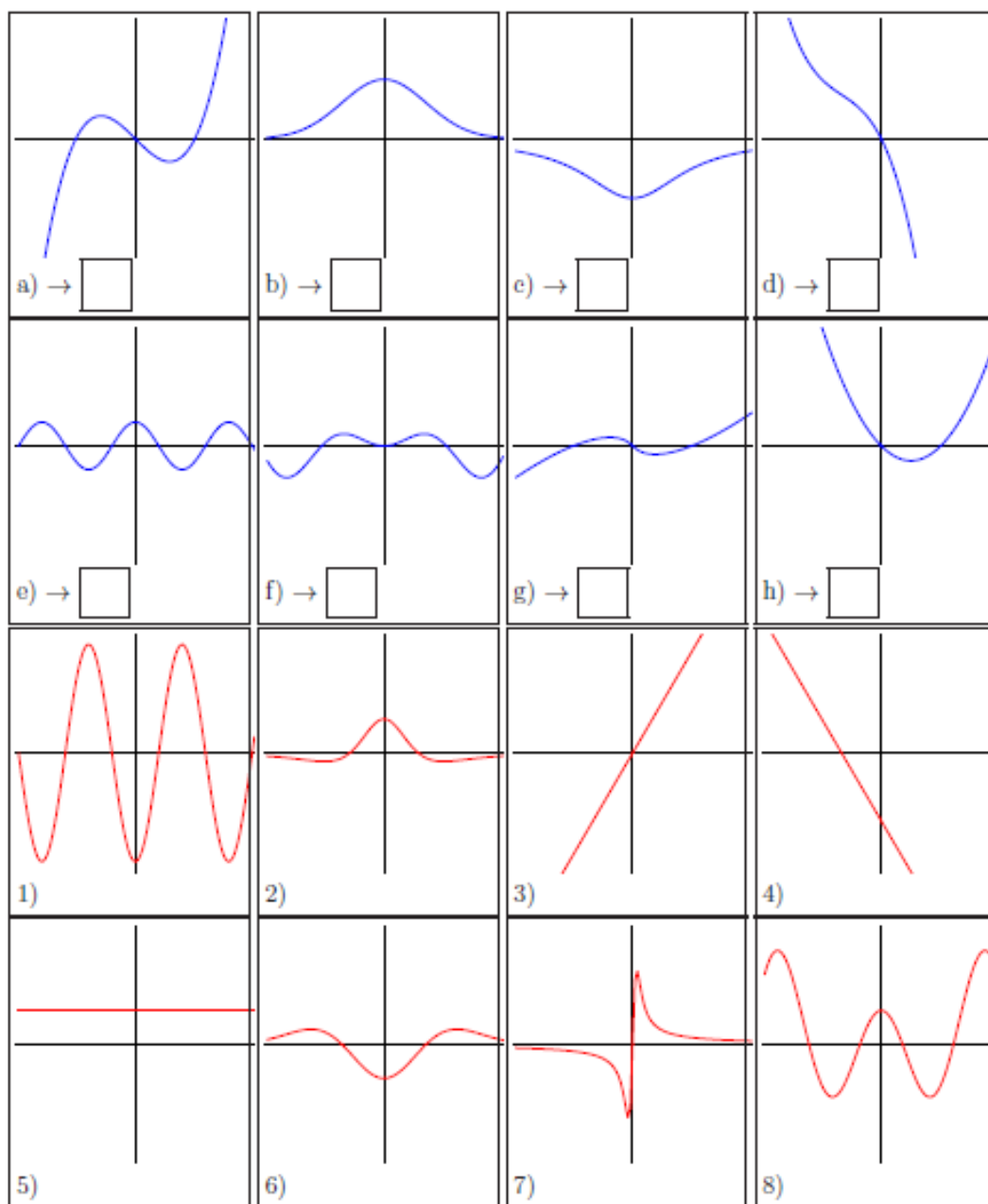
۹) تابع $g(x) = x - [x]$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم $g(0/9) = 0/9$ و $g(1/1) = 0/1$. آیا می‌توان نتیجه گرفت نقطه‌ای بین ۰/۹ و ۱/۱ وجود دارد که در آن $g(x) = 0/5$ باشد؟ در این زمینه، قضیه مقدار میانی چه نتیجه‌ای ارائه می‌دهد؟



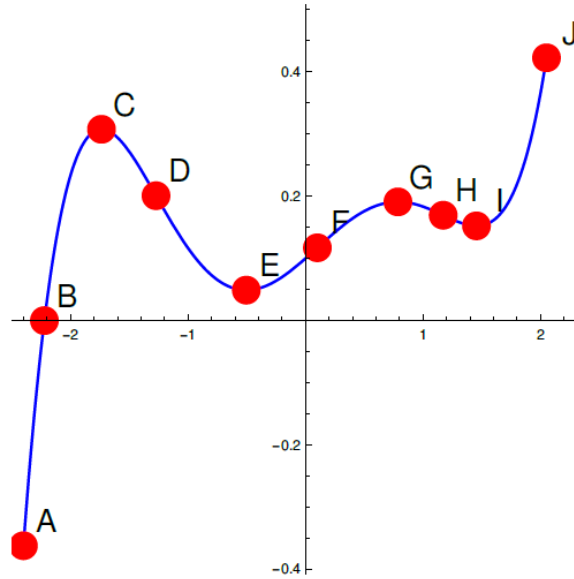
۱۰) با توجه به نمودار توابع داده شده (نمودارهای a-h)، نمودار تابع مشتق متناظر آن، f' ، (نمودارهای ۱-۸) را مشخص کنید.



۱۱) با توجه به نمودار توابع داده شده (نمودارهای a-h)، نمودار تابع مشتق دوم متناظر آن، f'' ، (نمودارهای ۱-۸) را مشخص کنید.



۱۲) با توجه به نمودار زیر به سوالات پاسخ دهید.

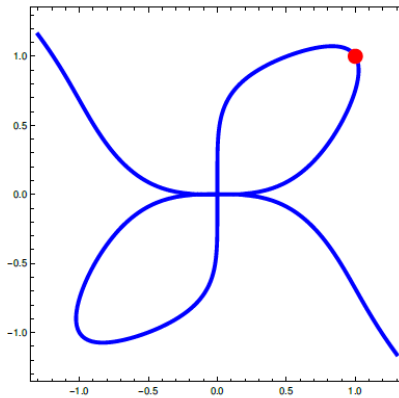


- (الف) کدامیک از نقاط A-J ریشه هستند.
- (ب) کدامیک از نقاط A-J نقاط عطف هستند.
- (پ) کدامیک از نقاط A-J ماکزیمم موضعی هستند.
- (ت) کدامیک از نقاط A-J مینیمم موضعی هستند.
- (ث) کدامیک از نقاط A-J ماکزیمم سراسری هستند.

۱۳) مختصات دو خودرو در تقاطع آزادراه به ترتیب برابر $x(t)$ و $y(t)$ است. می دانیم

$$x^y + y^y - 2xy^2 = 0.$$

همچنین، $x'(0) = 3$ ، $x(0) = 1$ و $y(0) = 1$. مشتق $y(t)$ را به دست آورید.



۱۴) فرض کنید یک دسته آهن‌ربای قوی نفوذیم حلقه‌ای شکل دارید به طوری که شعاع داخلی آن‌ها برابر x ، شعاع بیرونی برابر $y = 1$ و ارتفاع برابر $h = x$ است. می‌خواهیم مساحت سطح $A = 2\pi(y-x)h + 2\pi(y^2 - x^2)$ را بیشینه کنیم. بنابراین، این مقدار بیشینه کردن عبارت است از

$$f(x) = 2\pi(1-x)h + 2\pi(1-x^2)$$



(الف) با استفاده از اینکه $f(x)$ مساحت سطح است، در کدام بازه $[a, b]$ بایستی در نظر گرفته شود؟

(ب) ماکزیمم موضعی در این بازه را بیابید.

(پ) با استفاده از آزمون مشتق دوم، درستی (ب) را بررسی کنید.

(ت) ماکزیمم سراسری در این بازه را بیابید.

۱۵) یک قطعه سیم به طول l را بریده و به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. یکی را به شکل مربع و دیگری را به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع خم می‌کنیم. برای اینکه مجموع مساحت‌ها کمینه شود، نسبت طول‌های بریده شده را تعیین کنید.

۱۶) مقدار حدود زیر را به دست آورید.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, (a, b > 0) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x, (a > 0)$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x \quad (vi) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

۱۷) فرض کنید f بر بازه $[0, 1]$ پیوسته و $f(0) = 0$ باشد. همچنین، فرض کنید f' بر بازه $(0, 1)$ موجود و صعودی باشد. نشان دهید تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ بر بازه $(0, 1)$ صعودی است.

(۱۸) فرض کنید تابع f به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

تعریف شده باشد. حاصل انتگرال $\int_0^1 f(x) dx$ را در صورت وجود بیابید.

(۱۹) حدود زیر را محاسبه کنید.

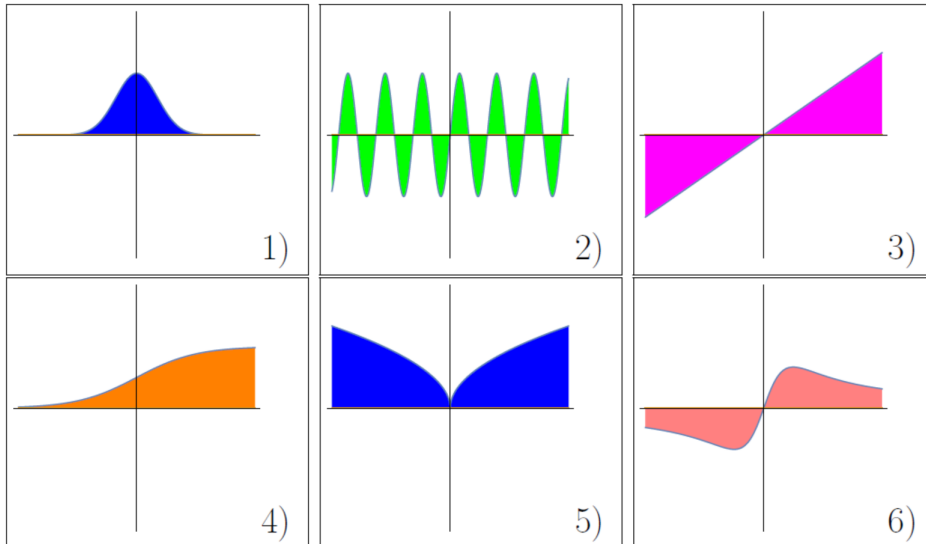
(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^5 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^5 \right),$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x (t-x)\sqrt{\cos t} dt,$

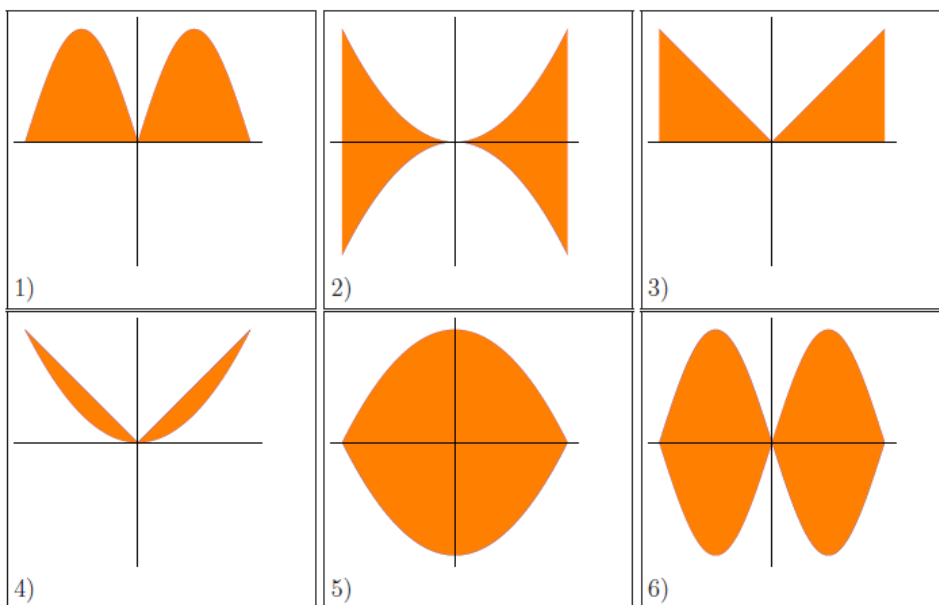
(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \dots + \frac{n}{2n} \right),$

(۲۰) در جاهای خالی، ناحیه متناظر با انتگرال‌های داده شده را مشخص کنید.

۱-۶	انتگرال	۱-۶	انتگرال
	$\int_{-4}^4 \frac{x}{\sqrt{x}} dx$		$\int_{-4}^4 \frac{e^x}{1+e^x} dx$
	$\int_{-4}^4 \sqrt{ x } dx$		$\int_{-4}^4 \sin(5x) dx$
	$\int_{-4}^4 e^{-x^2} dx$		$\int_{-4}^4 \frac{x}{1+x^2} dx$



انتگرال ۱-۶	انتگرال ۱-۶
$\int_{-1}^1 x dx$	$\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$
$\int_{-1}^1 \sin(\pi x) dx$	$\int_{-1}^1 2x^2 dx$
$\int_{-1}^1 \sin(\pi x) - (-\sin(\pi x)) dx$	$\int_{-1}^1 (x - x^2) dx$



(۲۱) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(i) $\int \tan^{-1} x dx$, (ii) $\int \frac{x^3 + 2}{x^3 - x} dx$, (iii) $\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} dx$, (iv) $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$,

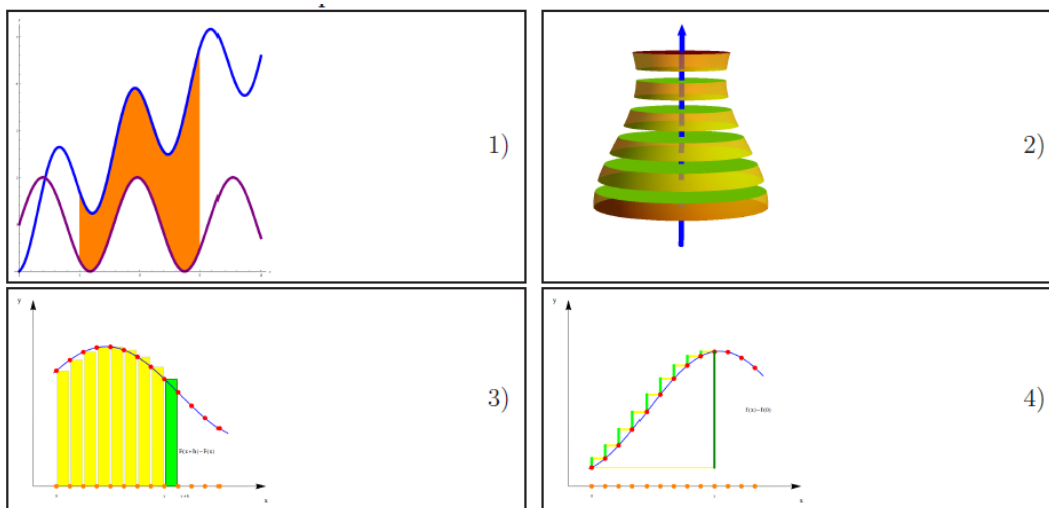
(v) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$, (vi) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} dx$, (vii) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$,

(viii) $\int_{-1}^3 [2x] dx$, (ix) $\int_0^n [t^2] dt$, (x) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \operatorname{sign}(x-1) dx$.

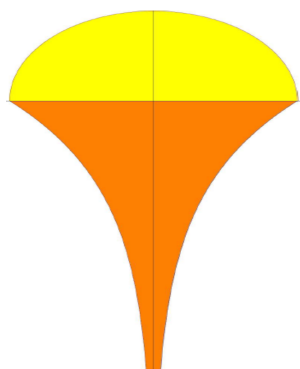
(۲۲) فرض کنید تابع f همه جا تعریف شده باشد و f'' تابعی پیوسته باشد و $f(0) = f(1)$ و $f'(1) = 3$. مقدار انتگرال $\int_0^1 x f''(x) dx$ را بیابید.

(۲۳) ابتدا مشخص کنید هر یک از انتگرال‌های داده شده بیانگر چه مفهومی هستند. سپس، شکل مرتبط با آن را مشخص کنید.

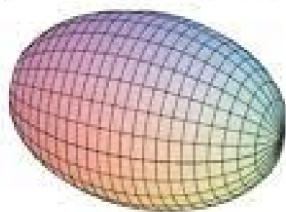
انتگرال	۱ - ۴	انتگرال	۱ - ۴
$\int_a^b A(z) dz$		$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt$	
$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$		$\int_0^x f'(t) dt$	



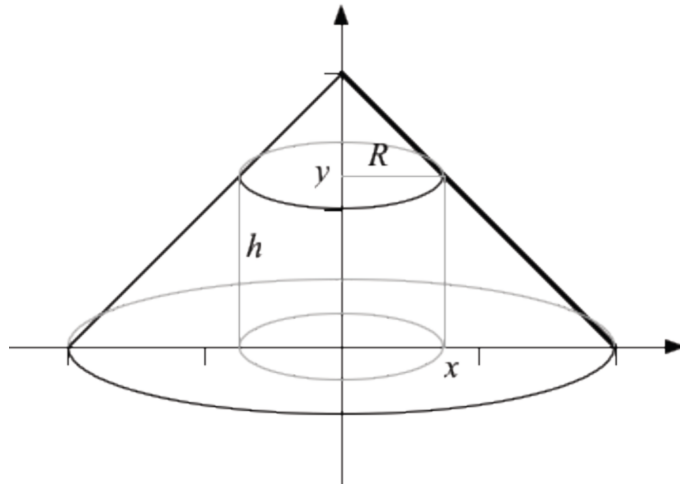
(۲۴) مساحت ناحیه محصور شده توسط نمودارهای توابع $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $f(x) = \log|x|$ را به دست آورید.



(۲۵) حجم بیضی‌وار حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ حول محور x ‌ها را بیابید.



(۲۶) ناحیه بین منحنی $y = 2 - x$ و محور x ، $0 \leq x \leq 2$ ، حول محور y دوران داده شده است. حجم جسم حاصل از دوران را با استفاده از (الف) روش برشی، (ب) روش پوسته‌های استوانه‌ای بیابید.



(۲۷) تابع با ضابطه $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$ ، $0 \leq x \leq a$ مفروض است. a را طوری بیابید که نسبت حجم حاصل از دوران سطح زیر منحنی حول محور x ها به مساحت سطح زیر منحنی برابر $\frac{\pi}{5}$ باشد.

(۲۸) تابع $f(x)$ را طوری بیابید که طول قوس آن در بازه $[0, x]$ برابر $2x + f(x)$ باشد.

(۲۹) فرض کنید $\mathcal{F}(s) = \int_0^{\infty} \sin(at)e^{-st} dt$ ، $(a \neq 0)$

(الف) به ازای چه مقادیری از s انتگرال فوق همگراست.

(ب) به ازای $s > 0$ مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

(۳۰) انتگرال $\int_1^{\infty} \left(\frac{cx}{2x^2 + 1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$ به ازای یک مقدار حقیقی c همگراست. c را تعیین و مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

«موفق باشید»