



تمرینات درس محاسبات عددی- رشته مهندسی عمران

(۱) الف) تقریبی برای $f(h)$ که در آن

$$f(h) = \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h},$$

به ازای $h = 0.00351$ را در ماشینی که از روش گردکردن و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

(ب) مقدار این تقریب را در ماشینی که از روش برشی و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

توجه شود:

$$\sin(1.003) = 0.843088000, \quad \sin(1.004) = 0.843625000, \quad \sin(1) = 0.841470000$$

(۲) تابع

$$f(x) = \frac{(\sin x - e^x) + 1}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

را در نظر بگیرید که در آن آرگومان سینوس بر حسب رادیان است.

الف) تقریبی برای $f(0.123)$ را در ماشینی که از روش برشی و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

(ب) با استفاده از چندجمله‌ای مک لورن توابع سینوس و نمایی، یک تقریب درجه دوم برای $f(x)$ به دست آورید. سپس، با استفاده از آن مقدار $f(0.123)$ را محاسبه کنید.

(۳) فرض کنید کامپیوتری در اختیار دارید که تنها قادر به ذخیره اعداد بین $10^6 -$ و 10^6 است. به عبارت دیگر، اگر مقادیر محاسبه شده بیشتر از این اعداد باشند، خطای سرریز ظاهر می‌شود. مشکلات محاسبه مقدار واریانس اعداد $x_1 = 10^4$ ، $x_2 = 10^4 - 1$ و $x_3 = 10^4 + 1$ با استفاده از فرمول

$$v = \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) - \mu^2, \quad \mu = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i,$$

در این کامپیوتر را بیان کنید. فرمول بالا را طوری بازنویسی کنید که مقدار واریانس این اعداد در این کامپیوتر قابل محاسبه باشد.

(۴) چرا محاسبه مقدار انتگرال

$$I(N) = \int_N^{N+1} \frac{dx}{1+x^2},$$

با استفاده از رابطه

$$I(N) = \arctan(N+1) - \arctan(N),$$

به ازای $N = 10^8$ ، از نظر عددی ناپایدار است. برای رفع مشکل، چه راهکاری را پیشنهاد می‌کنید. جواب خود را به طور کامل تشریح کنید.

(۵) دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ -10x_1 + 10^5x_2 &= 10^5, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. جواب این دستگاه را با روش حذفی گاوس در حساب ممیز شناور چهار رقمی و با استفاده از راهکارهای زیر به دست آورید:

(الف) محورگیری جزئی؛

(ب) محورگیری جزئی مقیاس شده؛

(پ) محورگیری کامل؛

(ت) جواب دقیق دستگاه را به دست آورده و با جواب‌های حاصل از قسمت‌های (الف)–(پ) مقایسه کنید.

(۶) ماتریس A و بردار b را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

(الف) توضیح دهید چرا ماتریس A دارای تجزیه LU نیست؛

(ب) با استفاده از محورگیری جزئی و ماتریس جایگشت مناسب P ، تجزیه LU برای ماتریس PA بیابید؛

(پ) با استفاده از ماتریس‌های P ، L و U جواب دستگاه $Ax = b$ را به دست آورید.

(۷) تجزیه چولسکی ماتریس خیام-پاسکال مرتبه ۴، یعنی،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix},$$

را به دست آورید.

(۸) جواب تقریبی دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} 20x_1 + x_2 - x_3 &= 17, \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13, \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18, \end{aligned}$$

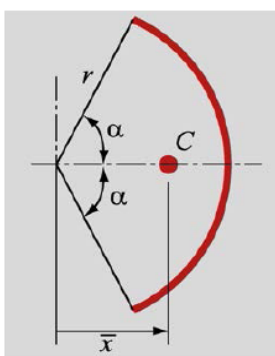
را با روش تکراری گاوس-سایدل و با حدس اولیه $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ به دست آورید (دو تکرار انجام دهید).

(۹) نشان دهید روش تکراری گاوس-سایدل در مورد دستگاه خطی

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5, \end{aligned}$$

به ازای هر بردار اولیه $x^{(0)}$ همگراست درحالی که روش تکراری ژاکوبی واگراست.

(۱۰)



مرکزگون یک قطاع دایره‌ای از رابطه $\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ که در آن α ، زاویه شعاع حامل r با محور قطبی است، به دست می‌آید. تقریبی برای α ، به ازای $\bar{x} = \frac{3r}{4}$ با استفاده از روش‌های زیر به دست آورید:

(الف) روش تنصیف (بازه اولیه را $[0.5, 1.5]$ در نظر گرفته و دو تکرار انجام دهید). حداقل تعداد تکرار لازم برای آنکه تقریب حاصل دارای ۴ رقم اعشار درست باشد، را بیابید.
(ب) روش تکرار ساده با استفاده از تقریب اولیه $\alpha_1 = 0.5$.

(۱۱) جواب تقریبی دستگاه معادلات غیرخطی زیر را با استفاده روش نیوتن و به ازای تقریب اولیه (۱, ۱) به دست آورید. سه تکرار انجام دهید.

$$\begin{aligned} -2x_1^3 + 3x_1^2 + 42 &= 0, \\ 5x_1^2 + 3x_1^2 - 69 &= 0. \end{aligned}$$

(۱۲) با ذکر دلیل مشخص کنید کدامیک از روش های تکراری

$$(a) \alpha = 2, x_{n+1} = -1 + x_n + x_n^2$$

$$(b) \alpha = 1, f(x) = x(1-x)^2 \text{ روش نیوتن برای}$$

$$(c) \alpha = 1, x_{n+1} = x_n^2 + x_n^{-2} - 1$$

$$(d) \alpha = \pi, f(x) = \sin(x) \text{ روش نیوتن برای}$$

برای محاسبه ریشه α ، به ازای انتخاب تقریب های اولیه مناسب، همگرایند. مرتبه همگرایی روش، در صورت همگرایی، را به دست آورید.

(۱۳) حداکثر اندازه گام h را برای جدول بندی تابع $\cos x$ در نقاط هم فاصله طوری بیابید که خطای حاصل از درونیابی خطی نابیشتر از $10^{-4} \times 0.5$ باشد؟

(۱۴) نشان دهید اگر $p(x)$ تابع f را در n نقطه $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ و $q(x)$ تابع f را در n نقطه $x_1, \dots, x_n$ درونیابی کنند، آنگاه تابع

$$s(x) = p(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} \cdot (p(x) - q(x)),$$

تابع f را در $n+1$ نقطه $x_0, x_1, \dots, x_n$ درونیابی می کند.

(۱۵) فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز باشند. نشان دهید

$$\sum_{i=0}^n x_i^{n+1} L_i(0) = (-1)^n \prod_{i=0}^n x_i.$$

(۱۶) ثابت کنید

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}.$$

که در آن $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

(۱۷) تابع خطا به صورت

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

تعریف می‌شود. مقادیر این تابع به صورت جدول

x	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۲۰
$erf(x)$	۰/۰۵۶۳۷	۰/۱۱۲۴۶	۰/۱۶۸۰۰	۰/۲۲۲۷۰

داده شده است.

(الف) $erf(۰/۰۸)$ را با استفاده از درونیابی خطی تخمین بزنید.

(ب) تقریبی برای $erf(۰/۰۸)$ ، با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب نیوتن و همه نقاط جدول بیابید.

(۱۸) نشان دهید شکل دوم گرانیگاهی چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ به صورت

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\beta_j}{x - x_j} f_j \bigg/ \sum_{j=0}^n \frac{\beta_j}{x - x_j},$$

است که در آن β_j ها، وزن‌های گرانیگاهی هستند و به شکل زیر تعریف می‌شوند (۲۰ نمره)

$$\beta_j = 1/\ell'(x_j), \quad \ell(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

(۱۹) پارامترهای b و c را طوری بیابید که تابع نمایی $y = ce^{bx}$ برازش کمترین مربعات داده‌های زیر باشد.

x_i	۱	۳	۴	۶	۹	۱۵
f_i	۴	۳/۵	۲/۹	۲/۵	۲/۷۵	۲

(۲۰) حلالیت آب در سوخت هواپیما، W_S ، به عنوان تابعی از دما، T ، را می‌توان با یک تابع نمایی به شکل $W_S = be^{mT}$ قالب‌بندی کرد. مقادیر حلالیت آب که در دماهای متفاوت اندازه‌گیری شده‌اند، در جدول زیر داده شده‌اند. پارامترهای m و T را طوری بیابید که این تابع، بهترین برازش را نتیجه دهد.

$T(^{\circ}C)$	-۴۰	-۲۰	۰	۲۰	۴۰
$W_S(\%wt.)$	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۰۶	۰/۰۱۱۸

(۲۱) طول گام بهینه را برای روش مشتق‌گیری عددی

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_2,$$

با هر دو هدف

$$|T(h)| = |R(h)|,$$

و

$$|T(h)| + |R(h)| = \text{minimum},$$

بیابید. سپس، با استفاده از روش عددی داده شده و طول گام بهینه به دست آمده با هدف $|T(h)| = |R(h)|$ ، تقریبی برای $f'(2/0)$ از داده‌های جدولی تابع $f(x) = \ln x$ به صورت

x_i	2/0	2/01	2/02	2/06	2/12
f_i	0/69315	0/69813	0/70310	0/72271	0/75142

که با خطای گرد کردن $10^{-6} \times 5$ داده شده‌اند، بیابید.

(۲۲) فرض کنید

$$A(h) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}.$$

(الف) نشان دهید

$$f'(x) - A(h) = C_1 h^2 + C_2 h^3 + C_3 h^4 + \dots$$

سپس، C_1 را بیابید.

(ب) با استفاده از $A(h)$ و داده‌های

x_i	0/398	0/399	0/400	0/401	0/402
f_i	0/408591	0/409671	0/410752	0/411834	0/412915

تقریبی برای $f'(0/398)$ به دست آورید. سپس، خطای تقریب را در صورتی که داده‌ها به‌طور دقیق گرد شده باشند، تخمین بزنید.

(۲۳) روش انتگرال‌گیری عددی نامتقارن

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{12} [5f(a) + 8f(b) - f(2b-a)] + E(f),$$

را که در آن $f \in C[a, 2b-a]$ ، در نظر بگیرید. نشان دهید:

(الف) روش برای تمام چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه دو دقیق است.

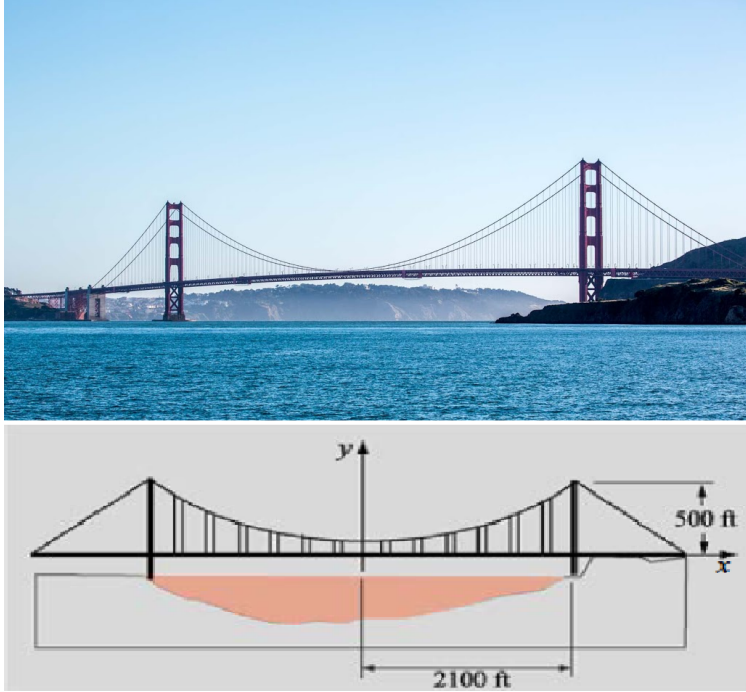
(ب) برای $f \in C^3[a, 2b-a]$ ، داریم

$$E(f) = \frac{(b-a)^4}{24} f'''(\xi), \quad \xi \in [a, 2b-a].$$

(۲۴) طول دهانه مرکزی پل دروازه طلایی ۴۲۰۰ فوت است و ارتفاع دکل‌های انتهایی آن از جاده برابر ۵۰۰ فوت می‌باشد. شکل کابل‌های معلق اصلی را می‌توان از تابع

$$f(x) = C \left(\frac{e^{x/C} + e^{-x/C}}{2} - 1 \right), \quad -2100 \leq x \leq 2100,$$

که در آن $C = 4491$ ، به دست آورد.



با استفاده از دو روش ذوزنقه‌ای مرکب و سیمپسون مرکب، تقریباتی برای طول کابل‌های معلق اصلی، $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ ، به دست آورید.

(۲۵) برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^1 e^{x^2} dx$ با قاعده

(الف) ذوزنقه‌ای مرکب،

(ب) سیمپسون مرکب،

و با دقت $\varepsilon = 10^{-6}$ ، بازه $[0, 1]$ حداقل به چند زیربازه باید تقسیم شود؟

(۲۶) ضرایب w_0, w_1, w_2 را طوری تعیین کنید که فرمول انتگرال‌گیری

$$\int_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} \approx w_0 f(0) + w_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + w_2 f(1),$$

دارای بالاترین درجه دقت باشد. سپس، با استفاده از آن تقریبی برای انتگرال زیر ارائه دهید

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$$

(۲۷) با استفاده از نسخه مرکب فرمول انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر دو-نقطه‌ای تقریبی برای انتگرال

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 (\sin x + 5 \ln x + e^{x^2}) dx,$$

به دست آورید در صورتی که بازه $[\frac{1}{4}, 1]$ به پنج زیربازه مساوی تقسیم شود.

(۲۸) با معرفی بردار $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$ ، شکل برداری مساله مقدار اولیه

$$u'_i = \frac{\sigma}{(\Delta x)^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad u_i(0) = g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

که در آن ضریب نفوذ گرمایی $\sigma > 0$ و تابع اولیه $g(x)$ مشخص هستند و $u_{N+1}(t) = u_0(t) = 0$ و $u_i(t) \approx u(x_i, t)$ را به شکل یک مساله مقدار اولیه خودگردان بنویسید.

(۲۹) نتایج حاصل از به کارگیری روش اویلر پیشرو برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(x) = x + 2y(x) + xy(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 2,$$

در جدول زیر آمده است.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
t_i	0	0/01	0/02	0/03	0/04	0/05	0/06	0/07
y_i	2	A	B	2/1233	2/1667	2/2113	2/2572	C

مقادیر A ، B و C را تعیین کنید.

(۳۰) هر یک از موارد زیر در مورد یک روش تک گامی خطی را به طور دقیق توضیح دهید.

(الف) خطای برشی موضعی (ب) خطای جامع (پ) مرتبه همگرایی
(ت) مرتبه تجربی همگرایی (ث) سازگاری (ج) پایداری خطی

(۳۱) روش عددی

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + (1 - \theta)h, \theta y_n + (1 - \theta)y_{n+1}),$$

برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(x) = f(x, y), \quad x_0 \leq x \leq \bar{x}, \\ y(x_0) = y_0,$$

را در نظر بگیرید.

(الف) مرتبه روش را به دست آورید.

(ب) به ازای چه مقادیری از θ ، روش همگراست.

(۳۲) (الف) در مورد ماهیت روش های رانگ-کوتا و ساختار کلی آنها به طور مختصر توضیح دهید.

سپس، نشان دهید این روش ها سازگارند هرگاه $\sum_{i=1}^s b_i = 1$.

(ب) نشان دهید مراحل میانی این روش‌ها از مرتبه حداقل یک هستند اگر و تنها اگر (۱۰ نمره)

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

(پ) روش رانگ-کوتا صریح دو مرحله‌ای برای حل مساله مقدار اولیه را به دست آورید.

«موفق باشید»