

به نام خدا



تمرینات درس ریاضیات عمومی ۲- رشته مهندسی برق
سری سوم-توابع برداری

مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۰۲/۱۵

مدرس: حسینی

(۱) سیاره زمین را به شکل کره‌ای واحد که در مرکز یک فضای سه بعدی قرار گرفته است، تصور کنید. شهاب سنگی از نقطه $P(0, 4, 3)$ در امتداد مسیر

$$\vec{r}(t) = ((4-t) \sin t, (4-t) \cos t, 3-t),$$

در حال نزدیک شدن به زمین است.

(الف) شهاب سنگ چه زمانی و کجا با زمین برخورد می‌کند.

(ب) سرعت شهاب سنگ در لحظه برخورد چقدر بوده است؟

(۲) اگر بردار سرعت ذره همواره بر خط واصل بین ذره تا نقطه ثابت P عمود باشد، نشان دهید مسیر حرکت ذره روی یک کره به مرکز P قرار دارد.

(۳) با استفاده از سنسورهای نصب شده روی یک فضاپیما، مشخص شد سرعت آن در زمان دلخواه $t \geq 0$ ، در رابطه $\vec{v}(t) = t\vec{i} + (2t^{3/2})\vec{j} + (2t^2)\vec{k}$ صدق می‌کند. مطلوبست محاسبه هر یک از موارد زیر در زمان دلخواه $t \geq 0$.

(الف) سرعت فضاپیما؛

(ب) بردار $\frac{d\vec{v}}{ds}$ ؛

(پ) مسافت طی شده توسط فضاپیما از لحظه $t = 0$ تا لحظه $t = T$ ؛

(ت) موقعیت فضاپیما، $\vec{r}(t)$ ، در صورتی که موقعیت آن در لحظه $t = 0$ ، برابر

$$\vec{r}(t=0) = \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k},$$

باشد.

(۴) ماشینی در یک جاده با قانون زیر حرکت می‌کند

$$x(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{u^2}{4}\right) du, \quad y(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{u^2}{4}\right) du, \quad t \geq 0$$

(الف) مطلوبست محاسبه سرعت، بردار یکه مماس، بردار یکه قائم اول بر مسیر و انحنای مسیر؛

(ب) در صورتی که انحنای جاده در رابطه

$$\left(\frac{d|\mathbf{v}|}{dt}\right)^2 + (\kappa|\mathbf{v}|^2)^2 < (\mu g)^2,$$

که در آن μ ضریب اصطکاک و g شتاب گرانش است، صدق کند، ماشین نمی‌تواند ترمز کند. چه زمانی ماشین ترمز می‌کند.

(پ) مسافتی که ماشین پس از ترمز می‌پیماید را به دست آورید.

(۵) فرض کنید C مکعب پیچ خورده

$$x = t, \quad y = \frac{1}{4}t^2, \quad z = \frac{1}{3}t^3,$$

باشد. در این صورت

(الف) انحنای ماکزیمم C را بیابید.

(ب) تاب و بردارهای $\vec{T}$ ، $\vec{N}$ و $\vec{B}$ سه وجهی حرکت C را در مبدأ و $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ بیابید.

(پ) تاب ماکزیمم C را بیابید.

(۶) (الف) نشان دهید عنصر طول قوس در مختصات کروی به شکل

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (\rho^2 \sin^2 \phi)(d\theta)^2,$$

بیان می‌شود.

(ب) طول منحنی زیر را بیابید.

$$\rho = 2e^\theta, \quad \phi = \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq \theta \leq \ln 8.$$

«موفق باشید»