

به نام خدا



تمرینات درس حل عددی معادلات دیفرانسیل- رشته ریاضیات و کاربردها

مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۰۳/۲۰

مدرس: حسینی

(۱) روش دو گامی ضمنی

$$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2h}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$y_0 = y(0), \quad y_1 = y_0 + hf(t_1, y_0),$$

که در آن $h = T/N$ و $t_n = nh$ ، $n = 0, \dots, N$ ، برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$y(0) = y_0, \quad (1)$$

را در نظر بگیرید.

(الف) سازگاری روش را بررسی کنید. مرتبه دقت روش چند است؟

(ب) پایداری مطلق روش را بررسی کنید و ناحیه پایداری مطلق روش را به دست آورید.

(۲) روش چند گامی خطی

$$y_{n+4} - y_n + \alpha(y_{n+3} - y_{n+1}) = h[\beta(f_{n+3} - f_{n+1}) + \gamma f_{n+2}],$$

که در آن $f_n = f(t_n, y(t_n))$ ، $t_n = t_0 + nh$ ، $n = 0, \dots, N$ ، برای حل مساله مقدار اولیه (۱) را در نظر بگیرید. α ، β و γ را طوری بیابید که روش از مرتبه ۳ باشد. آیا روش صفر-پایدار است؟

(۳) نشان دهید مرتبه روش دوگامی خطی

$$y_{n+2} + 2ay_{n+1} - (2a+1)y_n = h((a+2)f_{n+1} + af_n),$$

در حالت کلی برابر ۲ است. سپس، ثابت خطای آن را بر حسب پارامتر a به دست آورید. همچنین، نشان دهید به ازای مقداری از a مرتبه روش برابر ۳ است اما روش در این حالت صفر-پایدار نیست.

(۴) (الف) یک خانواده تک پارامتری از روش های دو گامی ضمنی

$$\sum_{j=0}^2 \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{n+j},$$

از بالاترین مرتبه ممکن بسازید و ثابت خطا را به دست آورید (با در نظر گرفتن α_1 ، به عنوان یک پارامتر، α_0 ، β_0 ، β_1 و β_2 را بر حسب α_1 به دست آورید. همچنین، α_2 را برابر ۱ در نظر بگیرید).

(ب) به ازای چه مقادیری از α_1 ، روش های حاصل از (الف) همگرایند. آیا می توان مرتبه روش را با انتخاب مناسبی از α_1 افزایش داد بدون اینکه همگرایی آن از بین رود؟

«موفق باشید»