

به نام خدا



تمرینات درس جبرخطی عددی- رشته علوم کامپیوتر
سری دوم- روش های تکراری حل دستگاه معادلات خطی

مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۰۹/۱۲

مدرس: حسینی

(۱) دستگاه معادلات $AX = b$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2/5 & 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

دارای جواب دقیق $X = (1, 1)^T$ است. بردار مانده را به ازای $Y = (2, 0)^T$ محاسبه کنید. سپس، مقدار خطای نسبی $\frac{\|X - Y\|_2}{\|Y\|_2}$ و $\frac{\|r\|_2}{\|b\|_2}$ را بیابید. آیا ماتریس A بد حالت است؟

(۲) ماتریس A و معکوس آن به صورت

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 & -0.8 \\ 1/2 & -2 & 1/4 \\ -0.6 & 1 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید.

(الف) عدد حالت ماتریس A در l_1 -نرم را به دست آورید.

(ب) فرض کنید $AX = b$ و $(A + E)\hat{X} = b$ که در آن $\|E\|_1 \leq 0.01$. کرانی برای تفاضل نسبی بین جواب های این دو دستگاه تعیین کنید.

(۳) (الف) نشان دهید به ازای هر نرم ماتریسی $\|\cdot\|$ و هر ماتریس مربعی A ، در صورتی که λ یک مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ باشد، داریم

$$\lambda \leq \|A^T\| \|A\|.$$

(ب) فرض کنید B یک ماتریس مربعی ناتکین باشد. نشان دهید

$$\kappa_2(B) \leq \sqrt{\kappa_1(B)\kappa_\infty(B)}$$

(۴) جواب تقریبی دستگاه معادلات

$$20x_1 + x_2 - x_3 = 17,$$

$$x_1 - 10x_2 + x_3 = 13,$$

$$-x_1 + x_2 + 10x_3 = 18,$$

را با روش تکراری گاوس-سایدل و با حدس اولیه $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ بدست آورید (چهار تکرار انجام دهید).

(۵) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4/5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ -x_2 + 2x_3 &= -5/5, \end{aligned}$$

بهترین انتخاب ω برای پیاده سازی روش SOR را بیابید.

(۶) الف) روش ژاکوبی برای حل دستگاه $AX = b$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

را بیان کنید.

ب) نشان دهید

$$u_k = (\sin(k\pi h), \sin(2k\pi h), \dots, \sin(nk\pi h))^T, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

که در آن $h = 1/(n+1)$ ، بردارهای ویژه ماتریس تکرار T_j هستند.

پ) نشان دهید روش به ازای هر تقریب اولیه $X^{(0)}$ ، همگراست.

«موفق باشید»