به نام خدا

تمرینات درس مبانی آنالیز عددی ـ رشته‌های علوم کامپیوتر و آمار و کاربردها
سری دوم ـ حل عددی دستگاه معادلات خطی

مدرّس: حسینی — مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۰۸/۲۰

---

۱) دستگاه معادلات خطی زیر را با روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{aligned} ۲x_۱ + ۴x_۲ - ۴x_۳ + x_۴ &= ۰, \\ ۳x_۱ + ۶x_۲ + x_۳ - ۲x_۴ &= -۷, \\ -x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ &= ۴, \\ x_۱ + x_۲ - ۴x_۳ + x_۴ &= ۲. \end{aligned}$$

۲) دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ &= ۳, \\ -۱۰x_۱ + ۱۰^۵x_۲ &= ۱۰^۵, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. جواب این دستگاه را با روش حذفی گاوس در حساب ممیز شناور چهار رقمی و با استفاده از راهکارهای زیر به‌دست آورید:

(الف) محورگیری جزئی؛

(ب) محورگیری جزئی مقیاس شده؛

(پ) محورگیری کامل؛

(ت) جواب دقیق دستگاه را به‌دست آورده و با جواب‌های حاصل از قسمت‌های (الف) ـ (پ) مقایسه کنید.

۳) فرض کنید هدف به‌دست آوردن تجزیه‌ای به شکل

$$\begin{bmatrix} ۱ & & & & \\ d_۲ & ۱ & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_n & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ & c_۱ & & & \\ & e_۲ & c_۲ & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{n-۱} & c_{n-۱} \\ & & & & e_n \end{bmatrix},$$

برای ماتریس سه قطری

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

باشد.

(الف) یک رابطه بازگشتی به‌دست آورید که مقادیر d_k و e_k را بر حسب a_k، b_k و c_k تعیین کند.

(ب) تحت چه شرطی روی ماتریس A، این تجزیه همواره وجود دارد؟

۴) ماتریس A و بردار b را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ & ۱۷ \\ ۳ & ۶ & -۱۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۲ & ۶ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} ۱۷ \\ ۳ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

(الف) توضیح دهید چرا ماتریس A دارای تجزیه LU نیست؛

(ب) با استفاده از محورگیری جزئی و ماتریس جایگشت مناسب P، تجزیه LU برای ماتریس PA بیابید؛

(پ) با استفاده از ماتریس‌های P، L و U جواب دستگاه $AX = b$ را به‌دست آورید.

«موفق باشید»