تمرینات درس جبرخطی عددی ـ رشته ریاضیات و کاربردها
سری دوم: روش‌های تکراری حل دستگاه معادلات خطی

مدرّس: حسینی — مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۹/۱۶

---

۱) در هر یک از گزاره‌های زیر استفاده از چه نرمی را پیشنهاد می‌کنید.

(الف) محاسبه مسافتی که از درب ورودی دانشگاه تا کتابخانه مرکزی باید طی کرد.

(ب) محاسبه ارتفاع یک در به‌طوری‌که هر فرد زیر ۱/۶ متر بتواند بدون خم شدن از آن رد شود.

(پ) محاسبه اندازه باقی‌مانده پس از برازش داده‌ها با یک خط مستقیم در تقریب کمترین مربعات

(ت) اطمینان از اینکه همه مولفه‌های یک بردار خطا کمتر از $۱۰^{-۳}$ باشند.

(ث) محاسبه تعداد خانه‌هایی که یک رخ باید برای رسیدن به یک موقعیت خاص در صفحه شطرنج انجام دهد (ممکن است بیش از یک حرکت نیاز باشد).

۲) دستگاه معادلات $AX = b$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱/۰۰۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} ۲/۰۰۱ \\ ۲ \end{bmatrix},$$

دارای جواب دقیق $X = (۱, ۱)^T$ است. بردار مانده را به‌ازای $Y = (۲, ۰)^T$ محاسبه کنید. سپس، مقدار خطای نسبی $\dfrac{\|X - Y\|_۲}{\|Y\|_۲}$ و $\dfrac{\|r\|_۲}{\|b\|_۲}$ را بیابید. آیا ماتریس A بد حالت است؟

۳) ماتریس A و معکوس آن به صورت

$$A = \begin{bmatrix} -۰/۴ & ۱ & -۰/۸ \\ ۱/۲ & -۲ & ۱/۴ \\ -۰/۶ & ۱ & -۰/۲ \end{bmatrix}, \quad A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید.

(الف) عدد حالت ماتریس A در $l_۱$ـنرم را به‌دست آورید.

(ب) فرض کنید $AX = b$ و $(A + E)\hat{X} = b$ که در آن $\|E\|_۱ \leq ۰/۰۱$. کرانی برای تفاضل نسبی بین جواب‌های این دو دستگاه تعیین کنید.

۴) فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. نشان دهید

$$\text{(i)}\ \|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_۲; \qquad \text{(ii)}\ \|A\|_۲ \le \sqrt{m}\|A\|_\infty.$$

۵) (الف) نشان دهید به‌ازای هر نرم ماتریسی $\|\cdot\|$ و هر ماتریس مربعی A، در صورتی‌که λ یک مقدار ویژه ماتریس A^TA، باشد، داریم

$$\lambda \le \|A^T\|\|A\|.$$

(ب) فرض کنید B یک ماتریس مربعی ناتکین باشد. نشان دهید

$$\kappa_۲(B) \le \sqrt{\kappa_۱(B)\kappa_\infty(B)}$$

۶) (الف) روش ژاکوبی برای حل دستگاه $AX = b$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & & & & \\ ۱ & -۲ & ۱ & & & \\ & ۱ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & ۱ & \\ & & & ۱ & -۲ \end{bmatrix},$$

را بیان کنید.

(ب) نشان دهید

$$u_k = \big(\sin(k\pi h), \sin(۲k\pi h), \ldots, \sin(nk\pi h)\big)^T, \quad k = ۱, ۲, \ldots, n,$$

که در آن $h = ۱/(n+۱)$، بردارهای ویژه ماتریس تکرار T_j هستند.

(پ) نشان دهید روش به‌ازای هر تقریب اولیه $X^{(۰)}$، همگراست.

۷) جواب تقریبی دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} ۲۰x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۱۷, \\ x_۱ - ۱۰x_۲ + x_۳ &= ۱۳, \\ -x_۱ + x_۲ + ۱۰x_۳ &= ۱۸, \end{aligned}$$

را با روش تکراری گاوس–سایدل و با حدس اولیه $X^{(۰)} = (۰, ۰, ۰)^T$ به‌دست آورید (دو تکرار انجام دهید).

۸) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} ۳x_۱ + ۲x_۲ &= ۴/۵, \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ &= ۵, \\ -x_۲ + ۲x_۳ &= -۰/۵, \end{aligned}$$

بهترین انتخاب ω برای پیاده سازی روش SOR را بیابید.

«موفق باشید»