

به نام خدا



تمرینات درس ریاضیات عمومی ۱ - رشته مهندسی برق
سری سوم: مشتق و کاربرد آن

مدرس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۰۹/۱۲

(۱) پیوستگی و مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x(1-x), & x \in \mathbb{Q}^c, \end{cases}$ را در $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

(۲) مشتق هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید.

(i) $f(x) = x^{\tan \frac{\pi x}{4}}, x = 1$; (ii) $g(x) = \sin^2\left(\frac{1}{4} \cos^{-1} x\right), x = \frac{1}{4}$.

(۳) مشتق مرتبه n ام توابع زیر را بیابید.

(i) $y = \ln(x^2 + x - 2)$, (ii) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

(۴) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $f'(0)$ را محاسبه کنید؛

ب) دلیل خود را برای وجود یا عدم وجود $f''(0)$ بیان کنید؛

پ) با ذکر دلیل مشخص کنید آیا نقطه $x = 0$ ، نقطه ماکزیمم نسبی یا می نیمم نسبی یا عطف تابع f است یا خیر؟

(۵) نقاط بحرانی تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \ln x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

را به دست آورید و تعیین کنید این نقاط ماکزیمم نسبی هستند یا می نیمم نسبی.

(۶) تقعر تابع $f(x) = \ln(2 - x - x^2)$ بر بازه (a, b) رو به سمت پایین است. حداکثر مقدار $b - a$ را بیابید.

(۷) فرض کنید f بر بازه $[0, 1]$ پیوسته و $f(0) = 0$ باشد. همچنین، فرض کنید f' بر بازه $(0, 1)$ موجود و صعودی باشد. نشان دهید تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ بر بازه $(0, 1)$ صعودی است.

۸) حدود زیر را حساب کنید.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, (a, b > 0) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x, (a > 0)$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x \quad (vi) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

۹) یک قطعه سیم به طول ℓ را بریده و به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. یکی را به شکل مربع و دیگری را به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع خم می‌کنیم. برای اینکه مجموع مساحت‌ها کمینه شود، نسبت طول‌های بریده شده را تعیین کنید.

«موفق باشید»