تمرینات درس معادلات دیفرانسیل جزئی ـ رشته ریاضیات و کاربردها

سری دوم: انتگرال و تبدیل فوریه

مدرّس: حسینی — مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۹/۱۶

---

۱) جواب معادله انتگرال نوع اول زیر را بیابید.

$$\int_0^\infty f(\omega)\cos(\omega x)\mathrm{d}\omega = \frac{e^{-x}\sin x}{x}, \qquad x > 0.$$

۲) تبدیل فوریه توابع زیر را بیابید.

(الف) $f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{2}$؛

(ب) $f(x) = e^{-ax^2}$؛

(پ) $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$؛

(ت) $f(x) = \ln(1+x^2)$؛

(ث) $\phi(x) = 1 + \int_0^\infty \phi(x-u)\mathrm{d}u, \quad -1 < x < 1$.

۳) تبدیل فوریه جواب معادله دیفرانسیل معمولی

$$\pi y'' - \pi y = \frac{-1}{x^2+1},$$

را بیابید.

۴) فرض کنید $F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n)$ تبدیل فوریه تابع f باشد که در آن δ، بیانگر دلتای کرونکر است.

(الف) تبدیل فوریه معکوس تابع f را به‌دست آورید.

(ب) اگر

$$c_0 = \pi, \qquad c_n = \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{n}, \qquad n \neq 0,$$

آنگاه نمودار تابع f را رسم کنید.

۵) تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} e^{-ax}, & x>۰, \\ ۰, & x<۰, \end{cases}$ به صورت $\dfrac{۱}{\sqrt{۲\pi}(a+i\omega)}$ است. تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>۰, \\ ۰, & x<۰, \end{cases}$ را به‌دست آورید.

«موفق باشید»