جزوه درس ریاضیات عمومی 2

حسینی

منابع: حساب دیفرانسیل و انتگرال - آدامز

حساب دیفرانسیل و انتگرال - توماس

سرفصل

مختصات فضایی (دستگاه مختصات دکارتی - استوانه‌ای - کروی)

بردارها - معادلات خط و صفحه

توابع برداری

توابع چند متغیره (حد و پیوستگی - مشتقات جزئی)

انتگرال های چندگانه

انتگرال خط و سطح

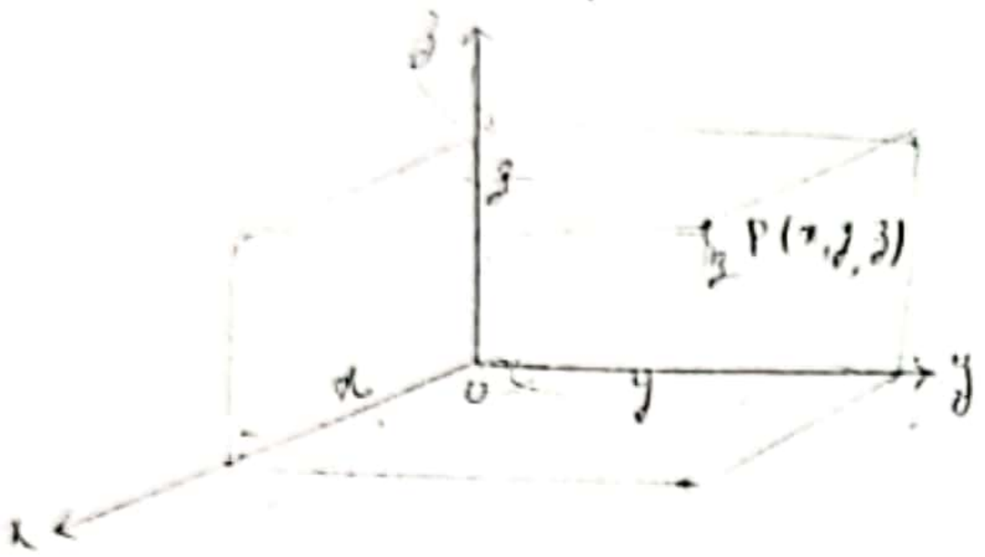
نمایش نقطه در فضا

(I) دکارتی: هر نقطه در فضا را بوسیله سه عامل x، y، z به صورت $P(x,y,z)$ نشان خواهیم داد که در آن

(a) x فاصله جهت‌دار نقطه از صفحه yz است.

(b) y " " " " " xz " .

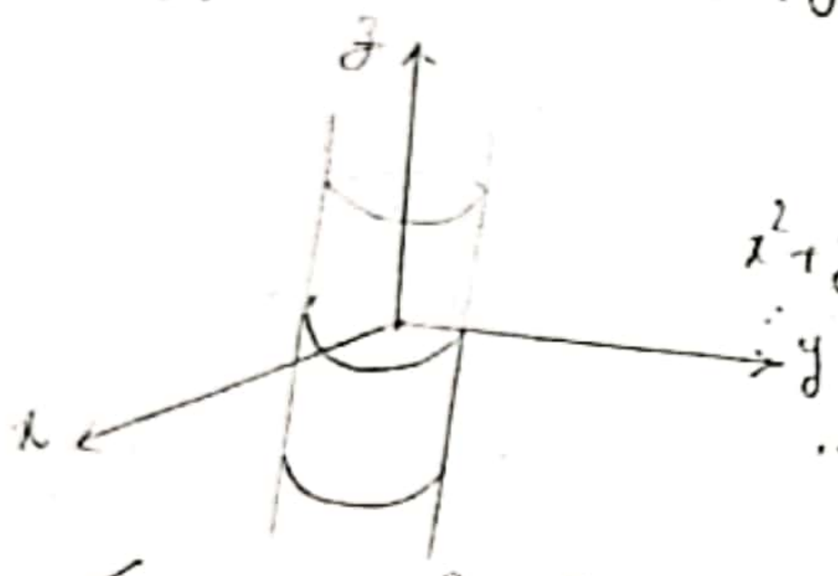
(c) z " " " " " xy " .



مثال 1. مکان هندسی نقاطی مانند $P(x,y,z)$ که $z=2$ است.

صفحه‌ای عمود بر محور zها (موازی با صفحه xy) به فاصله 2 از مبدا.

مثال 2. مکان هندسی نقاطی مانند $P(x,y,z)$ که در آن $x^2+y^2=1$، استوانه‌ای مدور که محور مرکزی آن محور zها و شعاع آن 1 است.

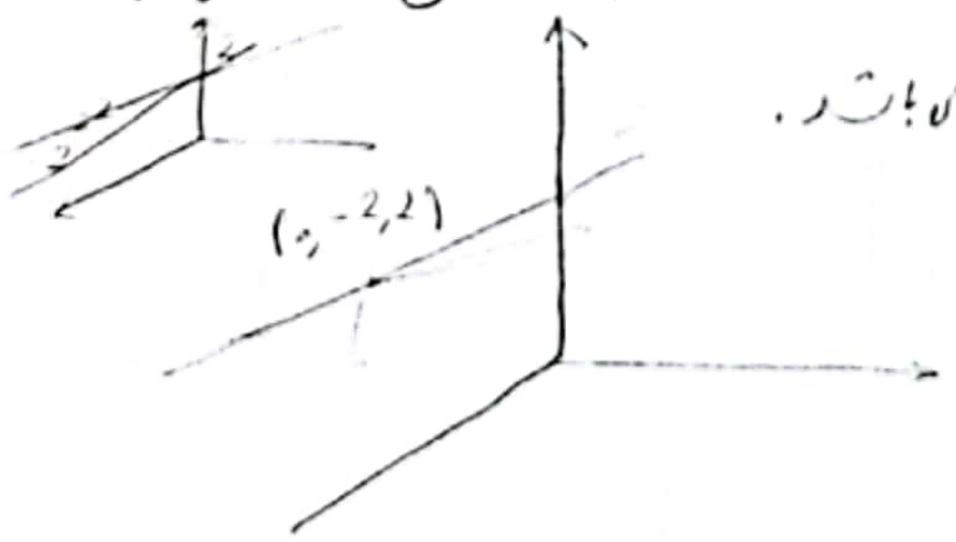


مثال 3. مکان هندسی نقاطی مانند $P(x,y,z)$ که در آن $x^2+z^2=1$ استوانه‌ای مدور که محور مرکزی آن محور yها و شعاع آن 1 است.

مثال 4. نقاط $P(x,y,z)$ را تعیین کنید که در معادلات $z=3$, $x^2+y^2=4$ صدق کند.

نقاط بر صفحه افقی $z=3$ واقع بوده و دایره $x^2+y^2=4$ را در این صفحه ایجاد می‌کند. این مجموعه نقاط را دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=3$ نامیده و یا به سادگی آن را دایره $x^2+y^2=4$ ، $z=3$ می‌نامیم.

مثال 5. مکان هندسی نقاطی مانند $P(x,y,z)$ که در آن $y=-2$, $z=2$ خطی گذرنده از نقطه $(0,-2,2)$ موازی با محور xها می‌باشد.

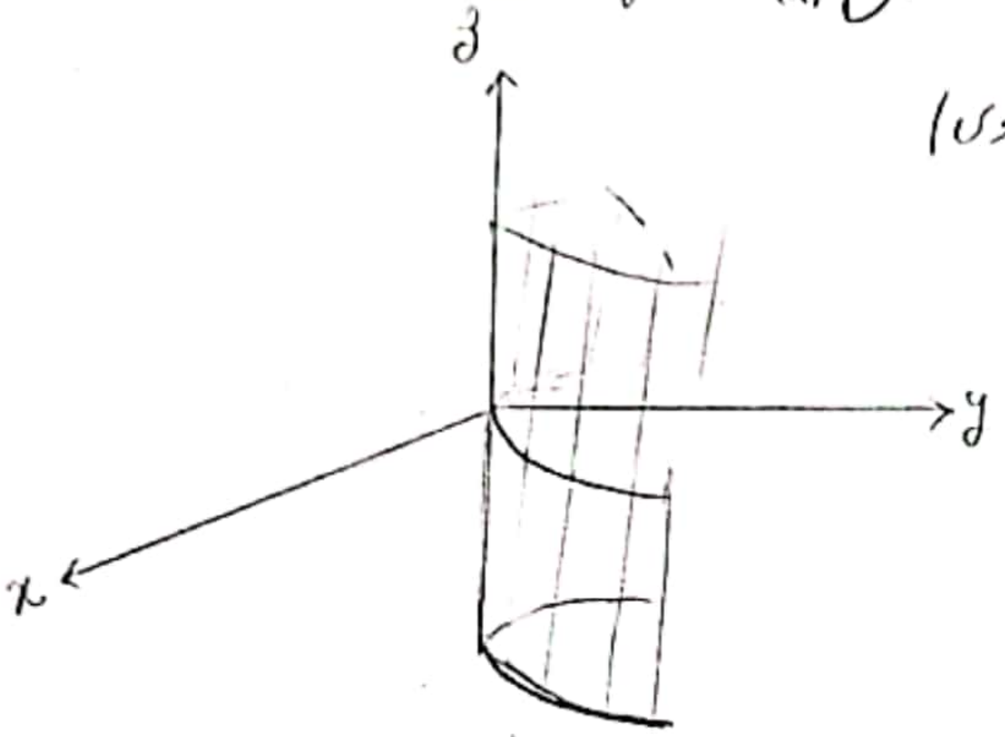


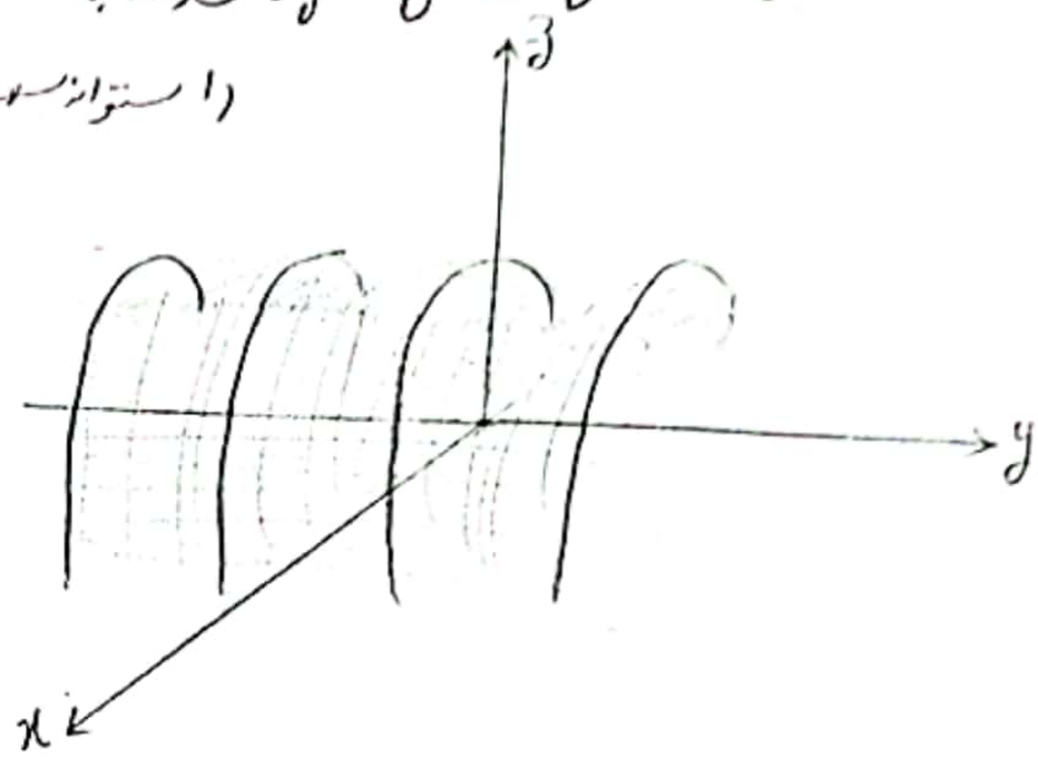
استوانه‌ها.

استوانه عبارت است از رویه‌ای متشکل از خطوطی که اولاً موازی خط ثابتی در فضا بوده و ثانیاً از یک منحنی واقع در صفحه می‌گذرد. این منحنی را منحنی مولد استوانه می‌نامند. در هندسه فضایی، اغلب منظور از استوانه، استوانه مستدیر است، یعنی منحنی مولد این استوانه دایره است ولی منظور کلی از استوانه، استوانه‌ای است که منحنی مولد آن هر نوع منحنی می‌تواند باشد.

مثال 6. مکان هندسی نقاطی مانند $P(x,y,z)$ که در آن (a) $y=x^2$ ، (b) $z=1-x^2$ را بیابید.

(استوانه سهموی)





(a) استوانه‌ای که مولدش به موازات محور zها است و مقطع آن با xy، سهمی $y=x^2$ را می‌سازد.

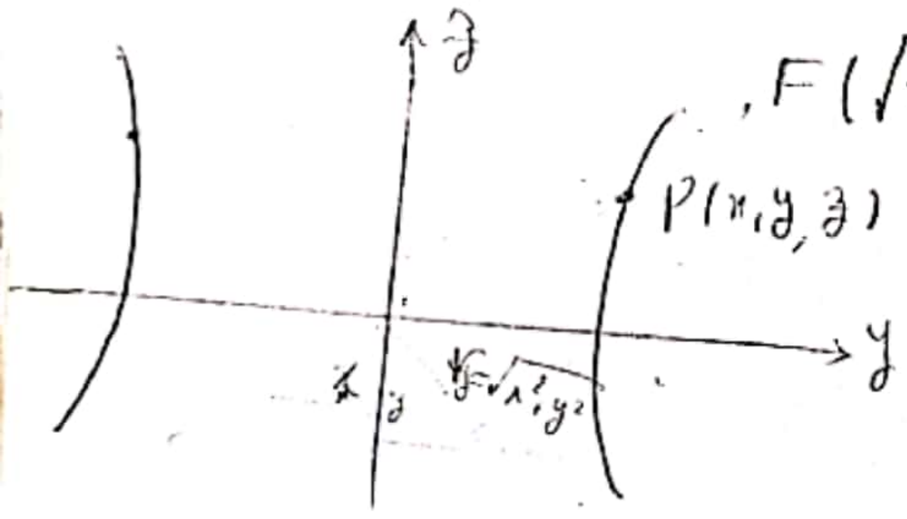
(b) استوانه‌ای که مولدش محور yها و مقطع آن با صفحه xz سهمی $z=1-x^2$ را می‌سازد.

تبصره 1. مکان هندسی نقاطی مانند $P(x,y,z)$ که در آن $F(x,y)=0$، استوانه است.

" " " $G(x,z)=0$ " " " " " " " " " " "

" " " $H(y,z)=0$ " " " " " " " " " " "

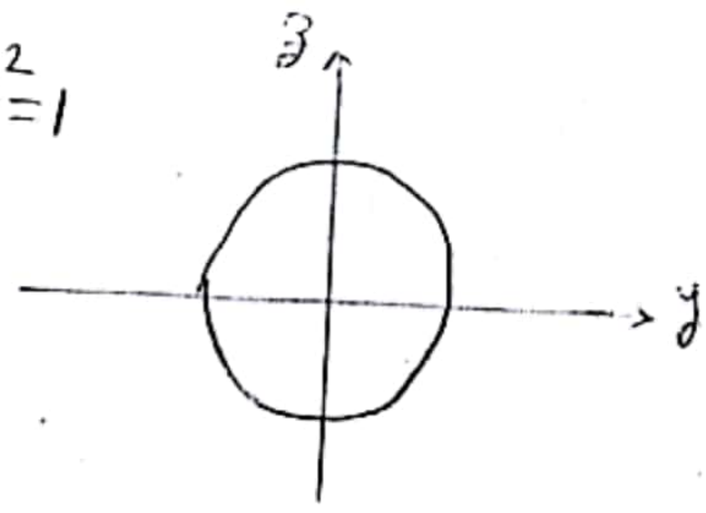
تبصره 2. هرگاه منحنی $F(y,z)=0$ (که در صفحه yz است) را حول محور zها دوران دهیم سطحی تولید می‌کند که معادله آن عبارت است از $F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$.

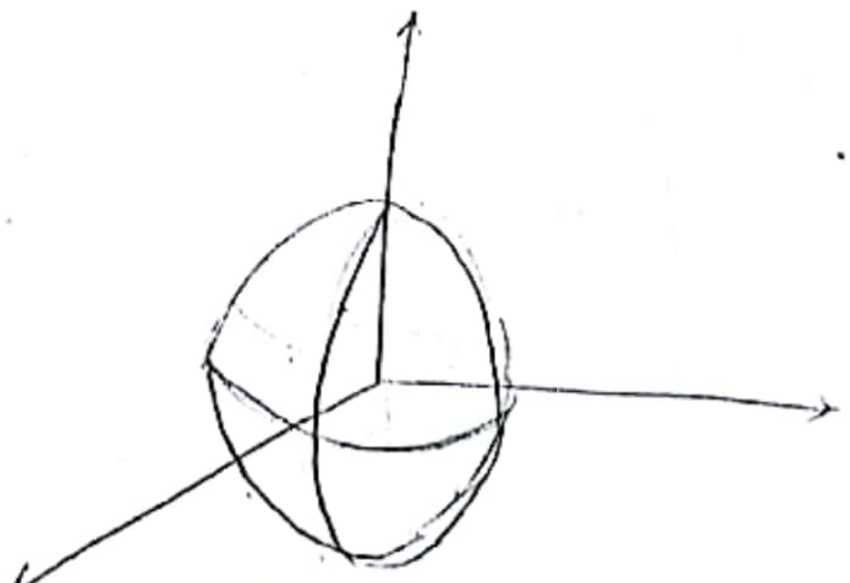


دوران ارتفاع نقطه یعنی z را تغییر نمی‌دهد ولی y تبدیل به فاصله از محور zها می‌شود.

مثال 7.

(a) $y^2+z^2=1$

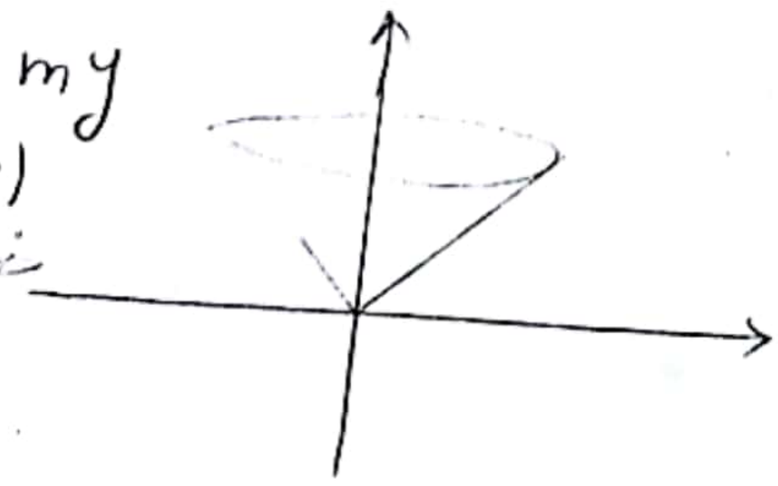




$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

(b) $z=my$ $(m>0)$

خط مار بر مبدا



$$z=m\sqrt{x^2+y^2}$$

$$z^2=m^2(x^2+y^2)$$

مخروط

2

(c) $z = y^2$

$z = (\sqrt{x^2+y^2})^2$

$z = x^2+y^2$

سهمی گون

تبصره 3. هرگاه منحنی $F(y,z)$ را حول محور y دوران دهیم سطحی تولید می‌شود که معادله آن عبارت است از

$$F(y, \sqrt{x^2+z^2}) = 0$$

تبصره 4. هرگاه منحنی $F(y,z)$ را حول دو محور دوران دهیم سطحی تولید می‌شود که معادله آن عبارت است از

$$F(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \wedge F(y, \sqrt{x^2+z^2}) = 0$$

(II) نمایش نقطه در مختصات استوانه‌ای

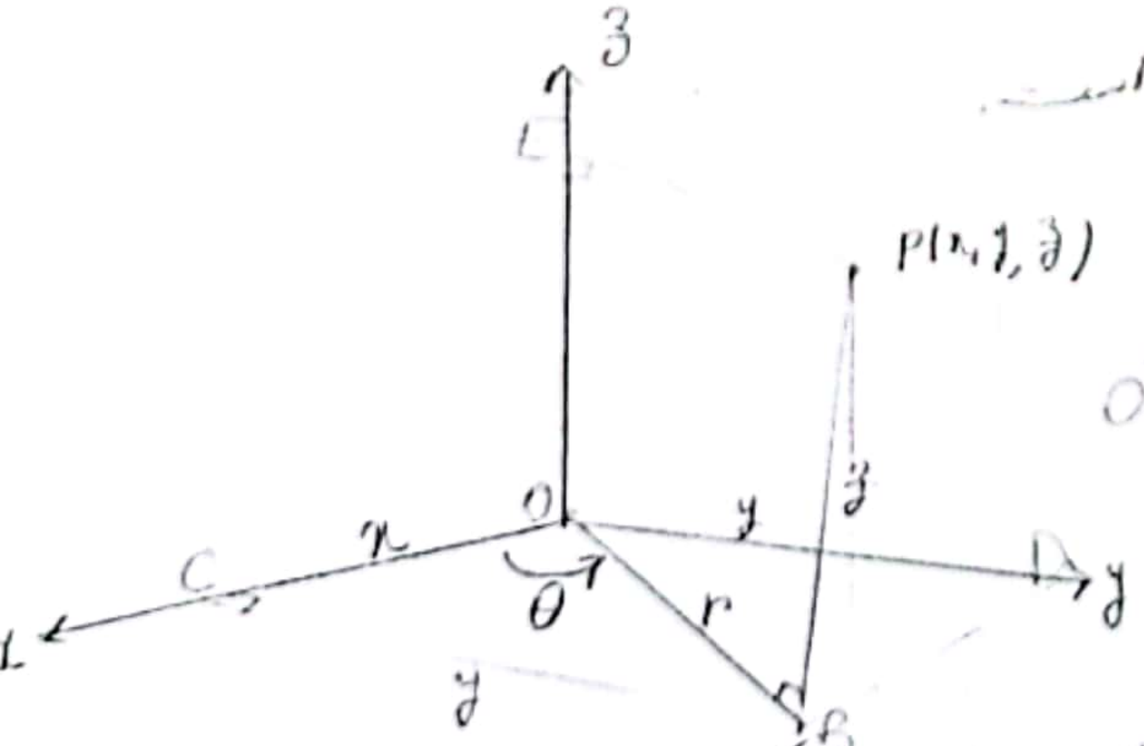
هدف: معرفی دو دستگاه مختصات جدید فضایی

در مختصات استوانه‌ای، استوانه‌ها معادلات ساده‌تری دارند و در مختصات کروی، کره‌ها و مخروط‌ها معادلات ساده‌تری دارند. (برای مطالعه حرکت سیارات از مختصات استوانه‌ای استفاده خواهیم کرد.)

مختصات استوانه‌ای در فضا از ترکیب مختصات قطبی در صفحه xy با محور z معمولی بدست می‌آید. یعنی هر نقطه مانند P در فضا در این دستگاه را با سه عامل r، θ، z بصورت $P(r, \theta, z)$ نشان می‌دهیم که در آن

1. r، θ مختصات قطبی تصویر قائم P بر صفحه xy هستند.
(r فاصله جهت‌دار نقطه از محور z و θ زاویه قطبی بین دو صفحه xoz و zoP است.)

2. z فاصله جهت‌دار P از صفحه xy است.



رابطه‌ی مختصات دکارتی و استوانه‌ای

$$\overset{\triangle}{OCB}: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \quad (\text{بنا به تعریف}) \end{cases}$$

معادلاتی که (x,y,z) دکارتی را به (r,θ,z) استوانه‌ای مربوط می‌کنند عبارتند از

$$\begin{cases} r^2 = x^2+y^2 \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$$

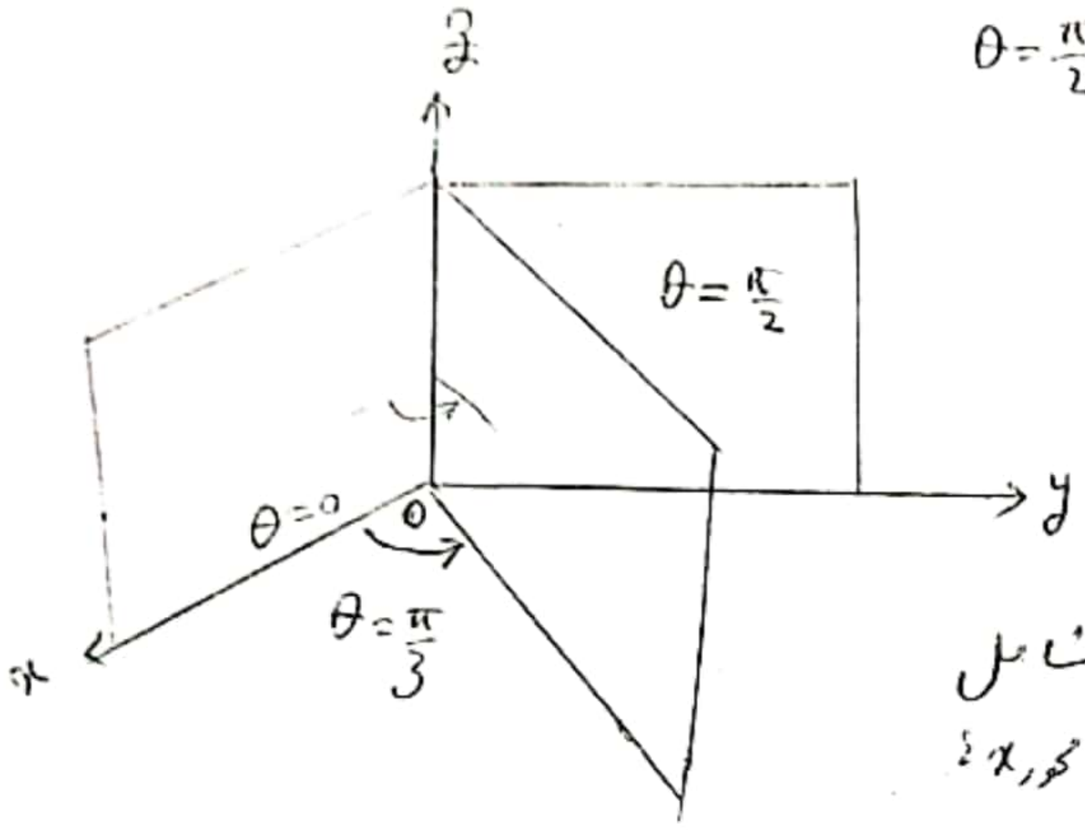
مثال 8. مکان $P(r,\theta,z)$ که در آن

(a) $\theta=0$ (b) $\theta=\frac{\pi}{3}$ (c) $\theta=\frac{\pi}{2}$

را مشخص کنید.

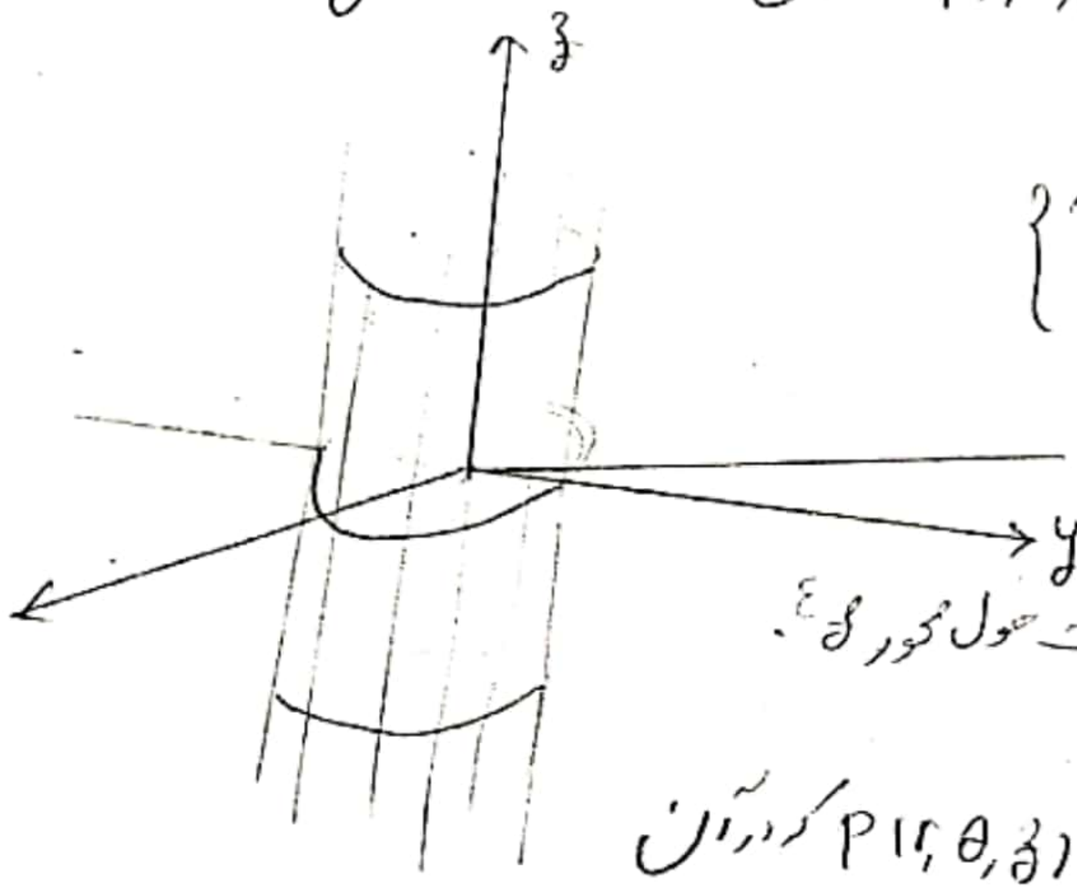
(a) صفحه xz

(c) صفحه yz



به طور کلی معادله $\theta=\theta_0$ نیم صفحه‌ای را توصیف می‌کند که شامل محور z بوده و زاویه‌ای به اندازه θ_0 با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

مثال 9. مکان هندسی نقاطی مانند $P(r,\theta,z)$ که در آن $r=c$، را مشخص کنید؟



$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ z \text{ دلخواه} \end{cases}$$

دایره‌ای به شعاع c : سطح مقطع

به طور کلی معادله $r=c$ استوانه‌ای است حول محور zها.

مثال 10. مکان هندسی نقاطی مانند $P(r,\theta,z)$ که در آن $F(r,z)=0$، را مشخص کنید.

مثلاً $z=r$ ، $z=r^2$ ، $z^2+r^2=1$ ، $z^2+(r-2)^2=1$ ، $z^2=r$

چنین مکان‌هایی سطوح دورانی هستند که محور دوران آنها محور z است.

برای توصیف این سطوح در صفحه xy محور فرضی r را در نظر می‌گیریم (که بر محور zها عمود است) (محور rها می‌تواند محور xها ($\theta=0$) و نیز محور yها ($\theta=\frac{\pi}{2}$) باشد)

$$z=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

مثلاً در صفحه zr، معادله $z=r$ خط نیمسازی است که با چرخیدن حول محور zها (θ دلخواه) مخروط 45° تولید می‌کند. چنین مکان $z=r^2$ در فضا یک سهمی‌گون است

مکان $z^2+(r-2)^2=1$ یک چنبره است.

مثال. مکان هندسی نقاطی مانند $P(r,\theta,z)$ را با توجه به معادلات داده شده بیابید.

(الف) $r=a(1+\cos\theta)$

(ب) $r=2a\cos\theta$

(ج) $r=2a\sin\theta$

(د) $\begin{cases} r=1 \\ z=\frac{1}{10}\theta \end{cases}$

(ه) $z=\theta$

مثال 12. (الف) معادله دکارتی رویه $z = r^2$ را بدست آورید و نوع رویه را معلوم کنید.

(ب) معادله استوانه $x^2 + (y-3)^2 = 9$ را بر حسب مختصات استوانه‌ای تعیین کنید.

(الف) سطح گون مستدیر $z = r^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2$

(ب) معادله قطبی ناحیه استوانه در صفحه xy

$x^2 + y^2 - 6y = 0 \Rightarrow r = 6\sin\theta$

$r = 1 + 2\cos\theta$ ← دکارتی

$x^2 + y^2 = 1$ ← استوانه

$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$

مختصات کروی: این دستگاه در حل مسایلی بکار می‌رود که در آنها تقارن کروی نسبت به هر نقطه مختصات وجود دارد.

هر مختصات کروی مثل P را با دو زاویه و یک فاصله مشخص می‌شود. بعبارت دیگر هر نقطه P در فضا را بصورت $P(\rho, \varphi, \theta)$ نشان می‌دهیم که در آن

(a) $\rho = |\overrightarrow{OP}|$ فاصله نقطه از مبدأ است. (ρ برخلاف r متغیر هم دیگر منفی نیست)

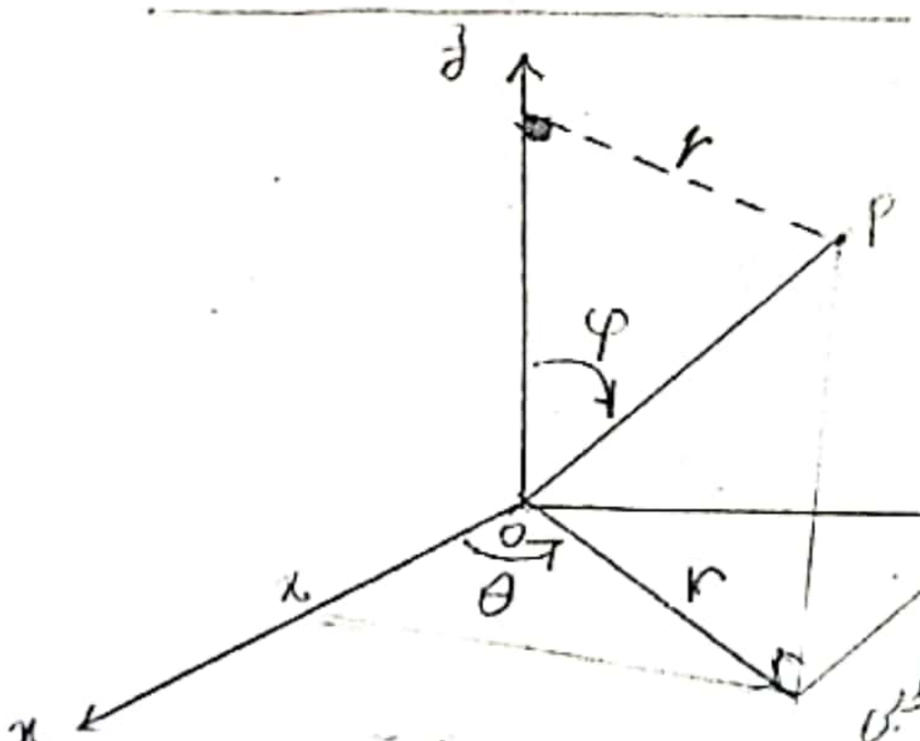
(b) φ زاویه بین $\overrightarrow{OP}$ با جهت مثبت محور z است و باید در بازه $[0, \pi]$ قرار داشته باشد.

(c) θ زاویه قطبی است.

برای سرنخ این دستگاه فرض کنید (x, y, z) مختصات استوانه‌ای نقطه P با مختصات دکارتی (x, y, z) باشد.

در اینصورت نقطه P روی نیم صفحه $\theta = \theta_0$ قرار دارد.

در این نیم صفحه دستگاه مختصات قطبی را با قطب O و محور قطبی x منطبق بر محور z در نظر بگیرید. لذا مختصات قطبی A روی نیم صفحه $\theta = \theta_0$ عبارتست از (r, φ),



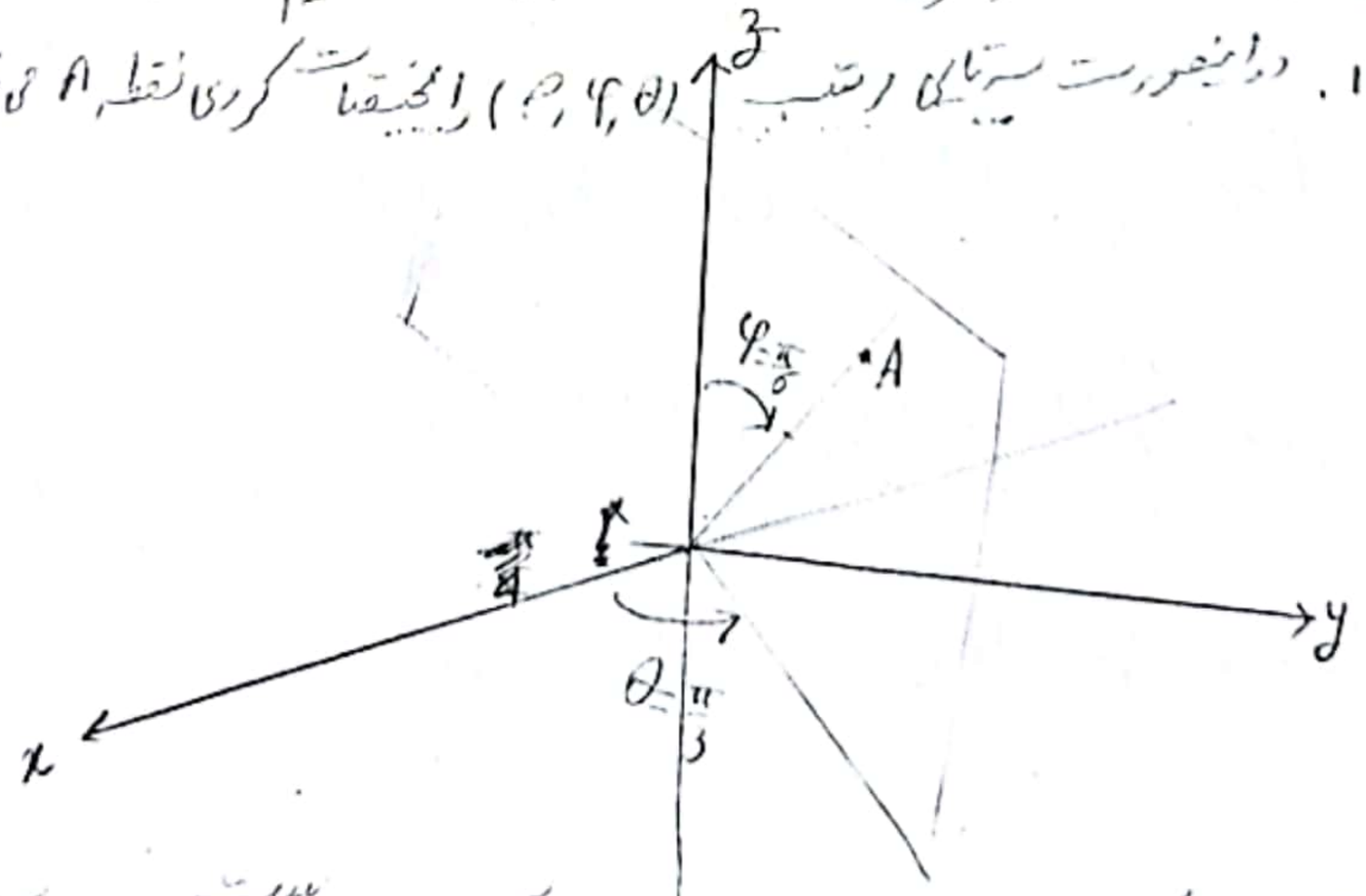
مثال 13. در اینصورت سه‌تایی مرتب (ρ, φ, θ) را مختصات کروی نقطه A می‌نامیم که در آن

$A\left(2, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

$B\left(3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

$C\left(2, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

$D\left(3, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$



چون $\theta = \theta_0$ صرف یک نیم صفحه عمود بر صفحه xy را مشخص می‌کند و از آن محور قطبی را مشخص می‌کند لذا تغییرات φ عبارتست از $[0, \pi]$

مثال 12. (i) معادله دکارتی رویه $z=r^2$ را بدست آورید و نوع رویه را معلوم کنید.

(ii) معادله استوانه $x^2+(y-3)^2=9$ را در مختصات استوانه‌ای تعیین کنید؟

(i) $z=r^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2$ سهمی‌گون مستدیر

(ii) $x^2+y^2-6y=0 \Rightarrow r=6\sin\theta$ (معادله قطبی قاعده استوانه در صفحه xy)

$r=1+2\cos\theta \longrightarrow$ دکارت

$xy=1 \longrightarrow$ استوانه‌ای

$x^2+y^2+xy-z=0$

مختصات کروی این دستگاه در حل مسائلی بکار می‌رود که در آنها تقارن محوری نسبت به هر سه محور مختصات وجود دارد.

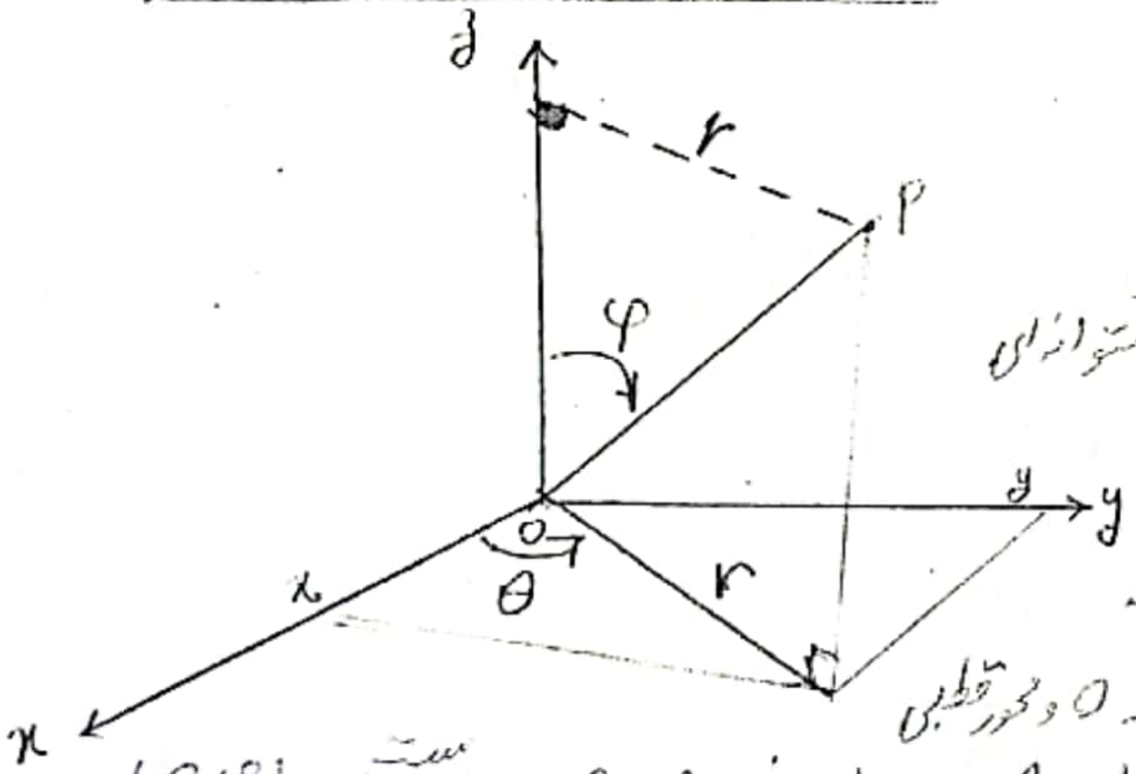
در مختصات کروی محل نقاط در فضا با دو زاویه و یک فاصله مشخص می‌شود. بعبارت دیگر هر نقطه P در فضا را بصورت $P(\rho,\varphi,\theta)$ نشان می‌دهیم که در آن

(a) $\rho=|\overrightarrow{OP}|$ فاصله نقطه از مبدأ است. (برخلاف r متغیر ρ هرگز منفی نیست)

(b) φ زاویه $\overrightarrow{OP}$ با جهت مثبت محور zها است و باید در بازه $[0,\pi]$ قرار داشته باشد.

شروع φ از محور zها است.

(c) θ زاویه قطبی است.



برای معرفی این دستگاه فرض کنید (r,θ_0,z) مختصات استوانه‌ای نقطه P با مختصات دکارتی (x,y,z) باشد.

در اینصورت نقطه P روی نیم صفحه $\theta=\theta_0$ قرار دارد.

در این نیم صفحه دستگاه مختصات قطبی را با قطب O و محور قطبی را منطبق بر محور zها در نظر بگیرید. لذا مختصات قطبی A روی نیم صفحه $\theta=\theta_0$ عبارت است از (ρ,φ).

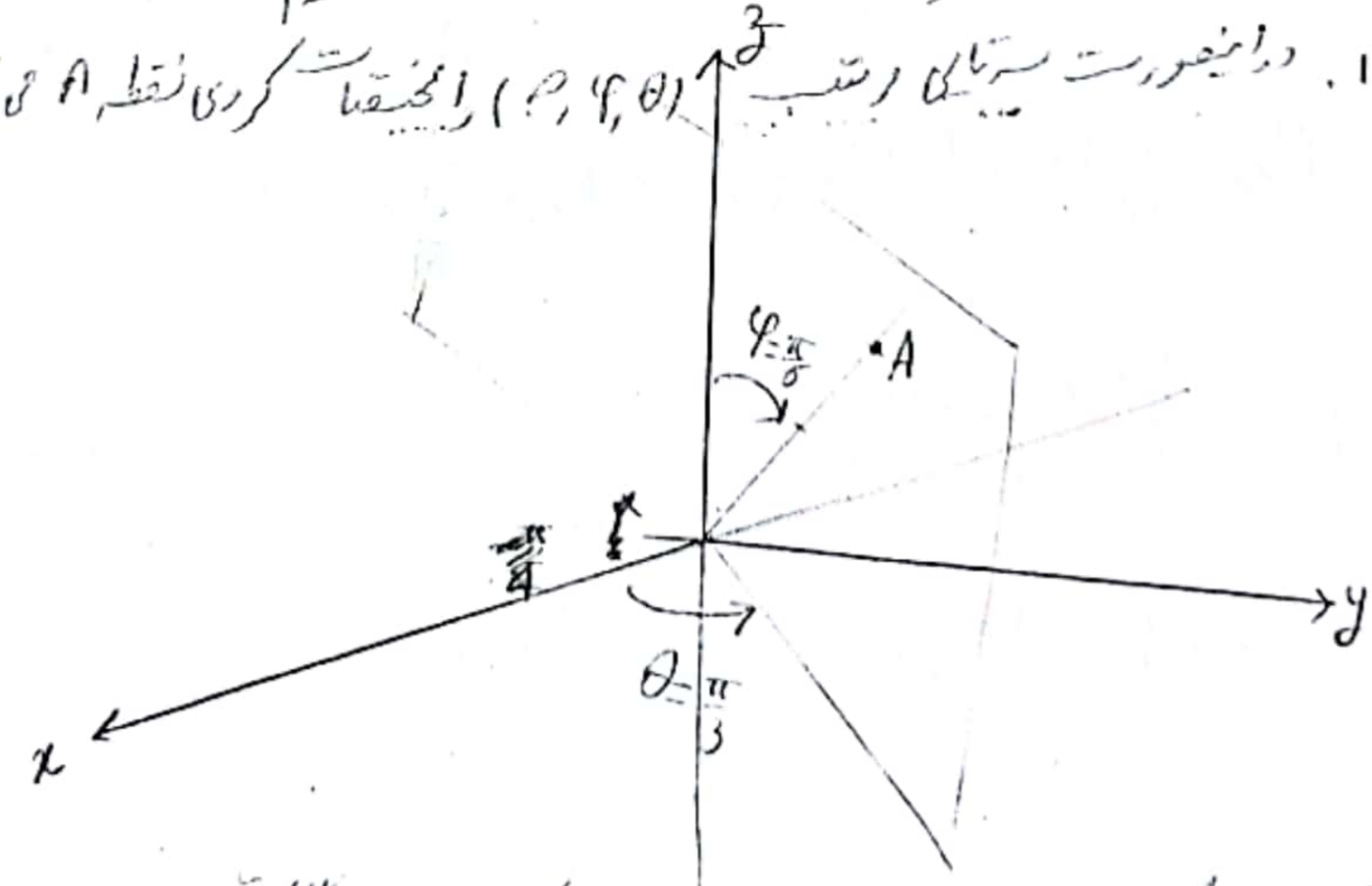
مثال 13. در اینصورت سه‌تایی مرتب (ρ,φ,θ) را مختصات کروی نقطه A می‌نامیم که در آن (*)

$A\left(2,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

$B\left(3,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

$C\left(2,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$

$D\left(3,\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$



چون $\theta=\theta_0$ معرف یک نیم صفحه و محور zها واقع در آن محور قطبی است، دامنه تغییرات φ عبارت است از $[0,\pi]$

(ج) أوجد حجم المجسم المحصور بين المخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ والكرة $x^2+y^2+z^2=2z$.

(د) أوجد حجم المجسم المحصور بين المخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ والكرة $x^2+y^2+z^2=2z$ باستخدام الإحداثيات الكروية.

هـ) حل.

(أ) أوجد حجم المجسم المحصور بين الكرة $x^2+y^2+z^2=4$ والأسطوانة $x^2+y^2=1$ باستخدام الإحداثيات الكروية.

(ب) أوجد حجم المجسم المحصور بين المخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ والكرة $x^2+y^2+z^2=2z$ باستخدام الإحداثيات الكروية.

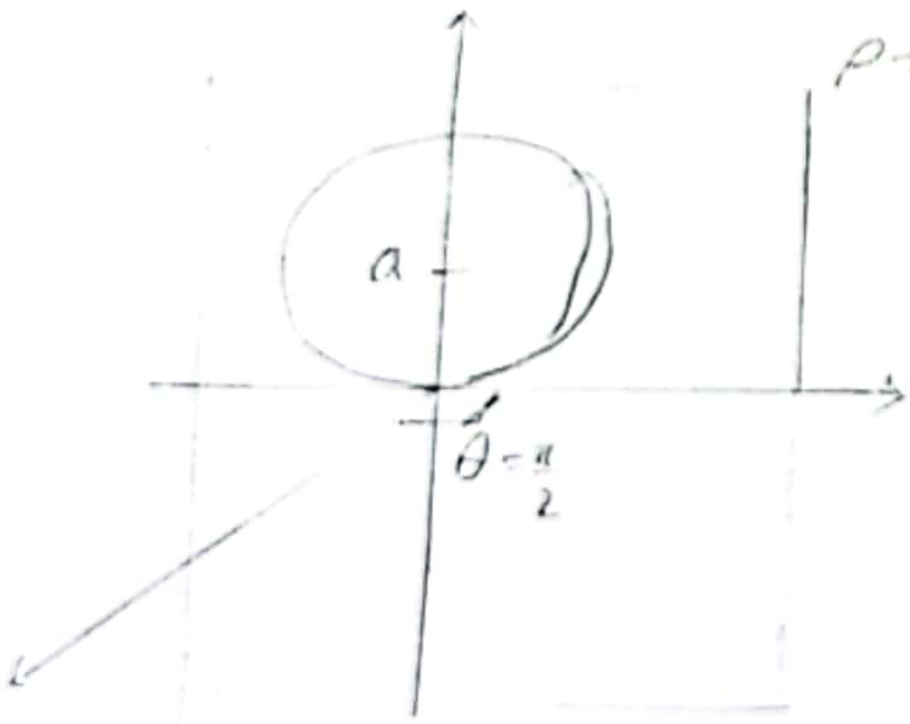
روابط بین دستگاه‌ها

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\varphi = \frac{y}{x} \\ \theta = \theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

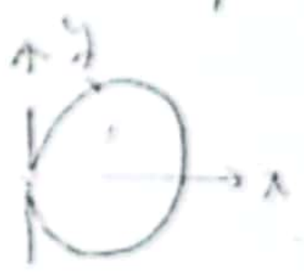
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan\varphi = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

مثال 15. مکان هندسی نقاطی مانند $P(\rho,\varphi,\theta)$ را بیابید به طوری که

$$\rho = 2a\cos\varphi \quad (b) \qquad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} & (a) \\ \rho = 2a\cos\varphi \end{cases}$$



$$\left(\begin{array}{l} r = 2a\cos\theta \\ r^2 = 2ax \\ (x-a)^2 + y^2 = a^2 \end{array} \right)$$



$$\rho = 2a\cos\varphi$$

$$\rho = 2a\frac{z}{\rho} \Rightarrow \rho^2 = 2az$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ (a) $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

بردارها

برای اندازه‌گیری بعضی کمیت‌ها فقط باید مقدار آنها معین گردد. به عنوان مثال، برای اندازه‌گیری جرم، طول و یا زمان فقط کافیست عدد و واحد مناسب اندازه‌گیری ذکر شود. ولی برای توضیح نیروها، جابجایی، سرعت و اطلاعات بیشتری نیاز است. برای تشریح نیرو، نه فقط بزرگی آن بلکه باید جهت اثر آن نیز ذکر گردد. برای تشریح جابجایی یک جسم، باید بیان کنیم که در چه جهتی و به چه مقدار جابجا شود. برای تشریح سرعت یک جسم، علاوه بر تندی حرکت مشخص گردد.

کمیت‌هایی که دارای جهت و مقدار می‌باشند غالباً توسط ماشین‌هایی که جهت آنها در جهت اثر کمیت‌ها و طول آنها برابر مقدار عمل برحسب واحدی مناسب است، بیان می‌شوند.

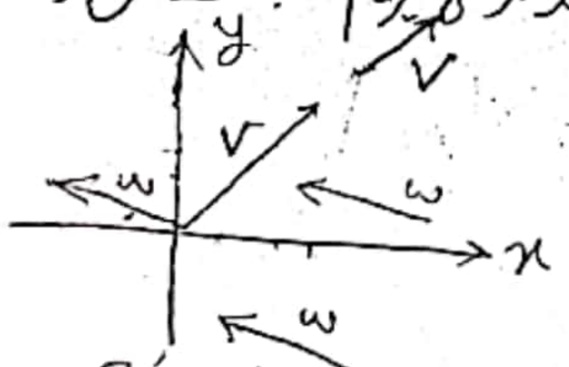
هر عضو $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به شکل $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ که در آن $x_i \in \mathbb{R}$ نمایش داد که اعمال جمع و ضرب اسکالر برای آن بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

$V = (a, b)$ بصورت $\mathbb{R}^2$ هر بردار در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ و ... بر روابط فوق، قرارداد هندسی نیز موجود است. هر بردار در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ و ... است که شکل آن را بصورت یک پاره‌خط جهت‌دار در نظر گرفته و جهت آن را بوسیله پیکان مشخص می‌کنند.



$V = (3, 5)$

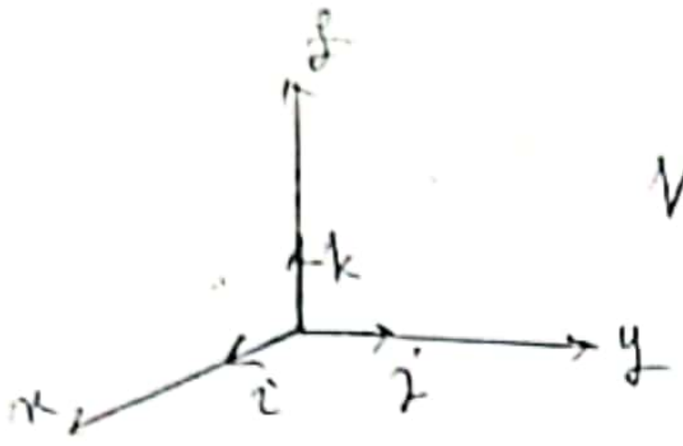
$W = (-3, 1)$

قرارداد: معمولاً بردار $(1, 0)$ را با i و بردار $(0, 1)$ را با j نشان می‌دهند. بنابراین داریم

$$V = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = ai + bj$$

هر بردار در $\mathbb{R}^2$ را می‌توان با استفاده از دو بردار i و j تولید کرد.

(هر بردار برحسب ترکیب خطی از i و j نوشته می‌شود)



$i(1,0,0)$
$j(0,1,0)$
$k(0,0,1)$

$V=(a,b,c)$
$= ai+bj+ck$

$\mathbb{R}^3$

تبصره. هر برداری که طول آن ۱ باشد یکانی گویند. مثلاً $i(1,0)$ یکانی در جهت افزایش x ها است

به طور کلی هر بردار به شکل $u=\cos\theta\, i+\sin\theta\, j$ یکانی است.

طول یک بردار

فرض کنید $\vec{a}=(x,y)$ برداری در صفحه باشد. در اینصورت طول بردار $\vec{a}$ را با $|\vec{a}|$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{a}=xi+yj$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

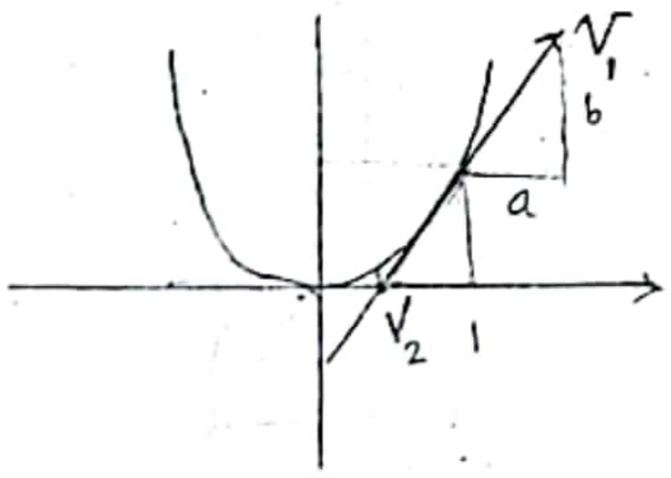
به طور مشابه هرگاه $\vec{a}=(x,y,z)$ برداری در فضا باشد، خواهیم داشت

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

در حالت کلی هرگاه $\vec{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه طول $\vec{u}$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$$

مثال 18. برداری به طول 5 پیدا کنید به طوری که بر سهمی $y=x^2$ در نقطه $x=1$ مماس باشد.



فرض کنید $\vec{V}=(a,b)$. در اینصورت

$$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ m=\dfrac{b}{a}=y'=2x\Big|_{x=1}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ b=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm\sqrt{5} \\ b=\pm 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$V_1=(\sqrt{5},2\sqrt{5})$

$\vec{V_2}=(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$

$y'=2x|_{x=1}=2 \Rightarrow v=i+2j$ بردار مماس خط مماس.

بردار یکانی مماس خط مماس $u=\dfrac{v}{|v|}$

$$u=\frac{i+2j}{\sqrt{5}}$$

جواب مسأله $=\pm 5u=\pm 5\left(\dfrac{i+2j}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow \begin{cases} u_1=(\sqrt{5},2\sqrt{5}) \\ u=(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}) \end{cases}$

مثال ۱۹: بردارهایی به طول ۵ بدست آورید که بر دایره $x^2+y^2=1$ در نقطه $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ مماس باشد.

$$m_t = y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{2}/2}{\pm 1/\sqrt{2}} = \pm 1$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 25 \\ \frac{b_1}{a_1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \\ a_1 = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

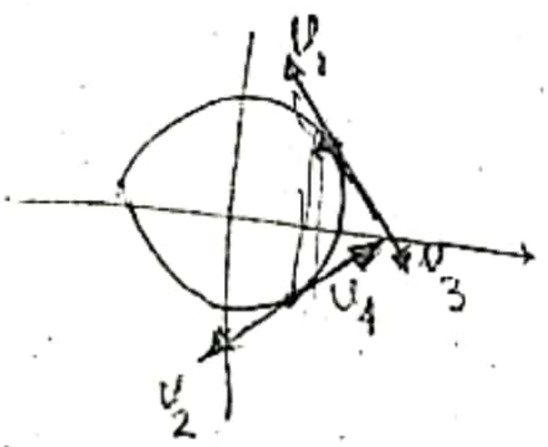
دو بردار برای نیم دایره بالایی

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v_1} = \frac{5}{\sqrt{2}}i + \frac{5}{\sqrt{2}}j \\ \vec{v_2} = \frac{-5}{\sqrt{2}}i - \frac{5}{\sqrt{2}}j \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2^2 + b_2^2 = 25 \\ \frac{b_2}{a_2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \\ a_2 = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

دو بردار برای نیم دایره پایینی

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v_3} = \frac{\sqrt{5}}{2}i - \frac{\sqrt{5}}{2}j \\ \vec{v_4} = \frac{-\sqrt{5}}{2}i + \frac{\sqrt{5}}{2}j \end{cases}$$



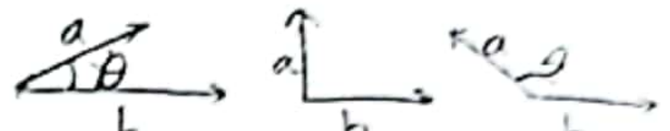
ضرب داخلی دو بردار (ضرب درونی - نقطه‌ای - عددی - اسکالر)

ضرب عددی دو بردار a و b را با $\vec{a}.\vec{b}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$\theta = (\hat{a,b})$

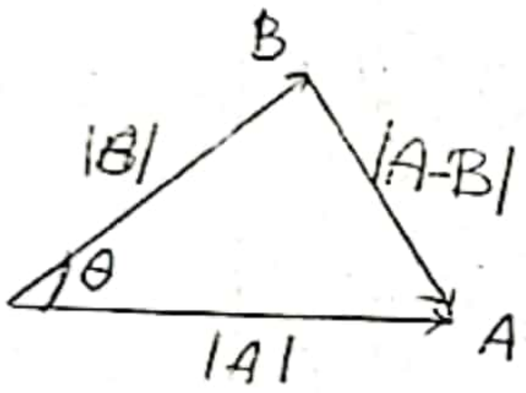
$\theta \in [0,\pi]$



$a.b = 0$ when $a=0$ or $b=0$

توصیف ضرب عددی با استفاده از مسئله ٤

فرض کنید $B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ ، $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$



در اینصورت

$$C = A - B = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k$$

با توجه به رابطه کسینوس ها در مثلث داریم

$$|A-B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos\theta$$

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2A.B$$

$$A.B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Hint.

$$A.A = |A|^2$$

$A \perp B$ iff $A.B = 0$

مثال ۲۰. زاویه بین دو بردار $V = 4i - j$ ، $W = 9i + 3j$ را بیابید؟

$$\cos\theta = \frac{V.W}{|V||W|} = \frac{36-3}{\sqrt{17}\sqrt{90}} = \frac{33}{\sqrt{1530}}$$

مثال ۲۱. مکان هندسی نقاطی مانند (x,y) که دو بردار زیر بر هم عمود باشند را بیابید.

$$A = xi + 2j + 3yk$$
$$B = xi - j - 2yk$$

$$A.B = 0 \Rightarrow x^2 - 6y^2 = 2$$

هذلولی

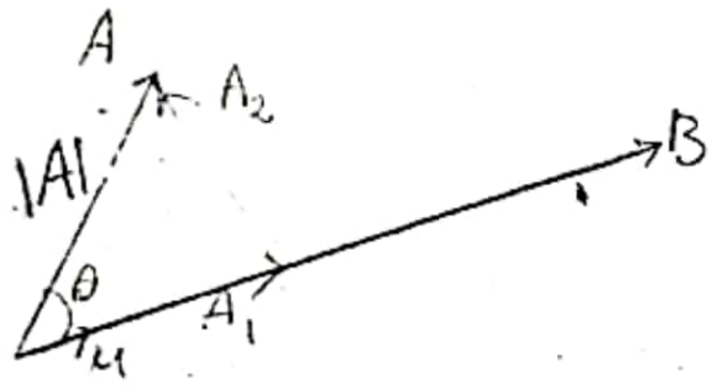
فرض کنید A ، B دو بردار مفروض باشند. بردار A را در راستای B و در جهت عمود بر B تجزیه می‌کنیم.

یعنی

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 \parallel B,\ A_2 \perp B$$

A_1 را تصویر A بر B نامید و با علامت $A_1 = \text{Proj}_B A$ نشان می‌دهیم.



$$A_2 = A - A_1 = A - \text{Proj}_B A$$

A_1 همانی هم جهت با A_1 است $\times$ اندازه‌ی

$$= |A| \cos\theta \times \vec{u}$$

$$= |A| \cdot \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|A|\cdot|B|} \cdot \frac{\vec{B}}{|B|}$$

$$= \left(\frac{A\cdot B}{|B|^2}\right)\vec{B}$$

مثال 22. تصویر بردار $A = 3i - 2j + k$ را روی بردار $B = i - 5k$ بدست آورید.

$$\text{Proj}_B A = \frac{3-5}{26}(i-5k) = -\frac{1}{13}i + \frac{5}{13}k$$

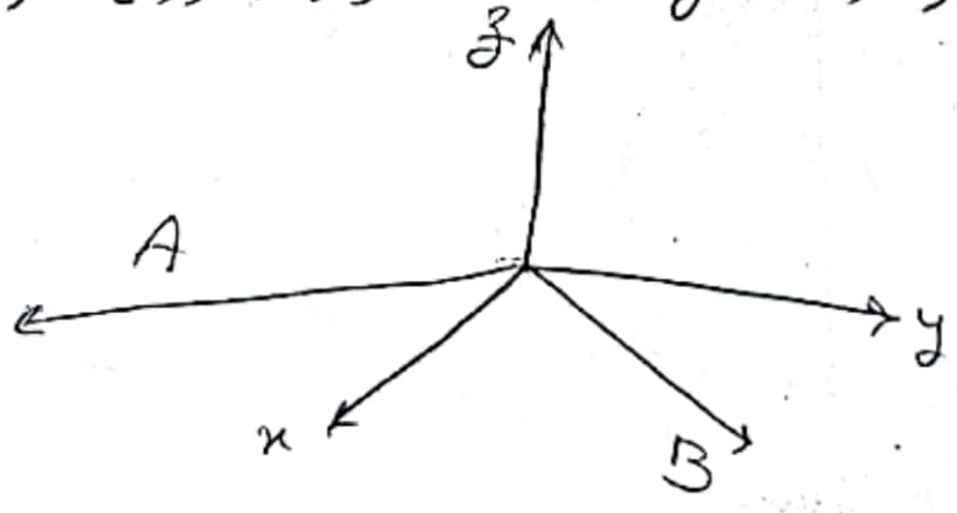
Hint.

$$|\text{Proj}_B A| = \left|\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|B|^2}\vec{B}\right| = \frac{|A\cdot B|}{|B|^2}|B| = \frac{|A\cdot B|}{|B|} = |A|\cos\theta$$

مثال 23. تصویر بردار $A = 5i - 8j + k$ را روی محور نیمساز ربع اول و سوم در صفحه xy بدست آورید.

$A = 5i - 8j + k$

$B = i + j$



$$|\text{Proj}_B A| = \frac{5-8}{2}(i+j) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}j$$

ضرب عددی برای بعد های بالاتر از 3 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

$$B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$$

$$A.B=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad , \qquad \cos\theta=\frac{A.B}{|A||B|}$$

خواص ضرب عددی دو بردار

1) $A.B=B.A$

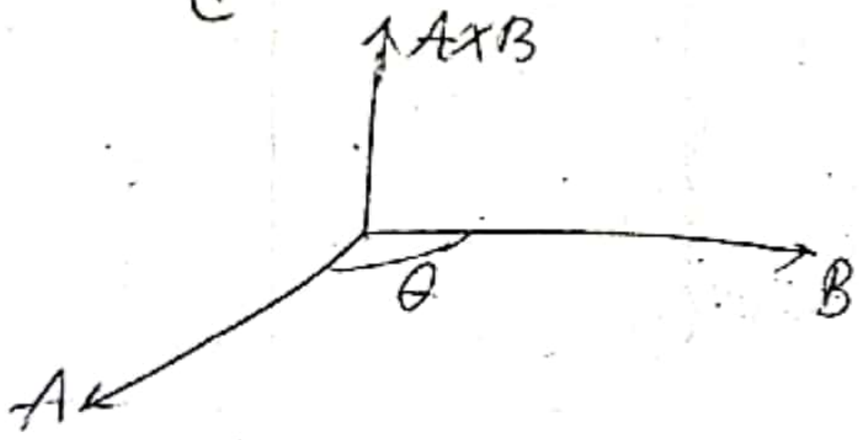
2) $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha(AB)=(\alpha A).B=A.(\alpha B)$

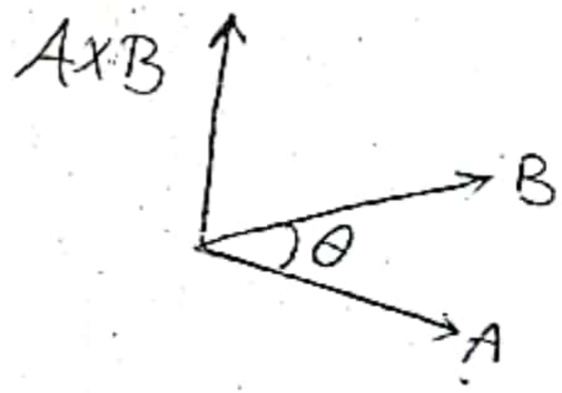
3) $A.(B+C)=A.B+A.C$

ضرب برداری دو بردار

ضرب برداری دو بردار A و B، برداری است

که اندازه آن برابر $|A||B|\sin\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$ و جهت آن عمود بر صفحه دو بردار است (طبق قانون دست راست گرد) A و B را نشان دهند





با توجه به تعریف فوق داریم

$$B\times A=-A\times B$$

خواص ضرب برداری

1) $A\times B=-B\times A$

2) $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha.(A\times B)=(\alpha A)\times B=A\times(\alpha B)$

3) $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$

محاسبه $A\times B$ با استفاده از سه لغزه

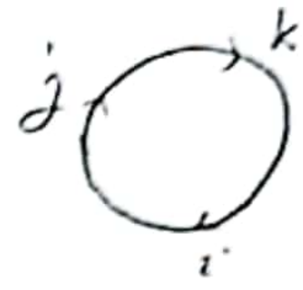
فرض کنید $A=a_1i+a_2j+a_3k$ ، $B=b_1i+b_2j+b_3k$ به صورت

$$A\times B=(a_1i+a_2j+a_3k)(b_1i+b_2j+b_3k)$$

$$=a_1b_1(i\times i)+a_1b_2(i\times j)+a_1b_3(i\times k)$$

$$+a_2b_1(j\times i)+a_2b_2(j\times j)+a_2b_3(j\times k)$$

$$+a_3b_1(k\times i)+a_3b_2(k\times j)+a_3b_3(k\times k)$$



$$=(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال 24. برداری به طول 5 بدست آورید که بر بردارهای زیر عمود باشد.

$$A=i+j-k$$
$$B=j+2k \quad \Longrightarrow \quad A\times B=3i-2j+k$$

$A\times B$ بردار عمود بر A و B

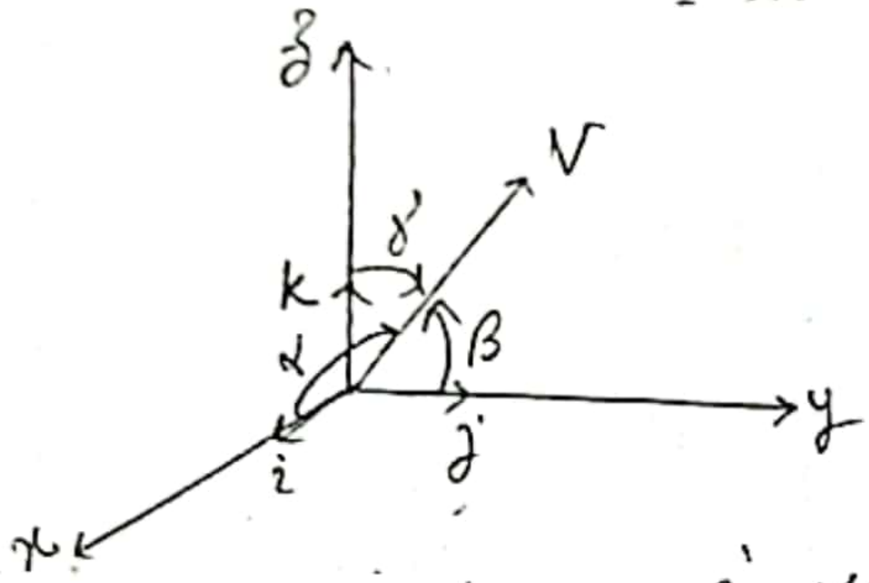
$\dfrac{A\times B}{|A\times B|}$ یکانی عمود بر دو بردار A و B

جواب $=\pm 5\dfrac{A\times B}{|A\times B|}=\dfrac{\pm 5}{\sqrt{14}}(3i-2j+k)$

کسینوس های هادی یک بردار

فرض کنید $V=ai+bj+ck$ یک بردار دلخواه باشد کزاویه ای بردار فوق با مثبت محورهای مختصات

بترتیب α ، β ، γ است. در اینصورت داریم



$$\cos\alpha=\frac{V\cdot i}{|V||i|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

α :- زاویه بین بردارهای V و i

$$\cos\beta=\frac{V\cdot j}{|V||j|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

β : زاویه بین V و j

γ : زاویه بین V و k

$$\cos\gamma=\frac{V\cdot k}{|V||k|}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

فرض کنید $\vec{u}$ بردار یکانی هم جهت V باشد. یعنی

$$\vec{u}=\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

در اینصورت

$$\vec{u}=(\cos\alpha)i+(\cos\beta)j+(\cos\gamma)k$$

لذا

$$\begin{cases}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\\ \delta_{1n}^2\alpha+\delta_{1n}^2\beta+\delta_{1n}^2\gamma=2\end{cases}$$

مثال 25. خط L از مبدأ عبور کرده و با محور x زاویه 45° و با محور z زاویه 60° می سازد.

زاویه بین این خط و محور y ها چقدر است؟ (سه جواب دارد)

فرض کنید u بردار یکانی هم جهت خط L باشد. در اینصورت

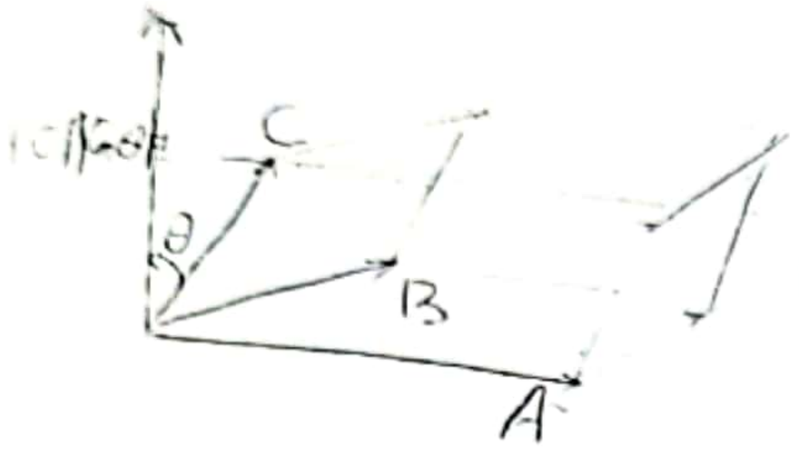
$$\alpha=45,\ \gamma=60$$

$$\cos^2\beta=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow\beta=\cos^{-1}\left(\pm\frac{1}{2}\right)$$

دو خط داریم. یکی با محور y ها زاویه 60 و دیگری 120 می سازد.

ضرب مختلط (ضرب عددی سه بردار)

مازای هر سه بردار A ، B ، C حاصلضرب $(A\times B).C$ را ضرب مختلط می نامند



ارتفاع × مساحت قاعده = حجم متوازی السطوح

$= |A\times B||C||\cos\theta|$

$|(A\times B).C| = |A\times B||C||\cos\theta| \Rightarrow$ حجم متوازی السطوح $= |(A\times B).C|$

با استفاده از صفات C,B و یا A ، C به عنوان صفحه قاعده متوازی السطوح تعیین شده تو سط بردا

A ، B ، C را جابجا می کنیم

$(A\times B).C = (B\times C).A = (C\times A).B$

(با استفاده از خواص دترمینان درستی رابطه فوق را بررسی کنید)

از خاصیت جابجایی ضرب نقطه ای (داخلی) داریم

$(A\times B).C = A.(B\times C)$

محاسبه ضرب سه گانه با استفاده از مولفه ها

فرض کنید

$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

$C = c_1 i + c_2 j + c_3 k$

در اینصورت

$$(A\times B).C = A.(B\times C)$$

$$= A\left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k\right]$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال 1. فرض کنید u، v و w بردارهایی یکه و دلخواه باشند به طوری که $u+v+w=0$. مقدار عبارت $u\cdot v+v\cdot w+w\cdot u$ را به دست آورید.

مثال 2. فرض کنید P متوازی الاضلاعی در $\mathbb{R}^3$ با مساحت A باشد. اگر مساحت سه متوازی الاضلاع حاصل از تصویر قائم P بر روی صفحات مختصات برابر A_1، A_2 و A_3 باشند، نشان دهید

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

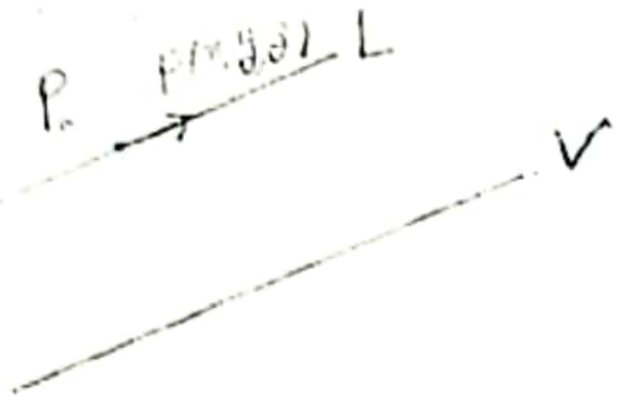
مثال 3. فرض کنید بردار v دو بردار با شند به طوری که $|u|=\sqrt{3}$، $|v|=1$ و زاویه بین آن‌ها برابر $\frac{\pi}{6}$ باشد. زاویه بین بردارهای $u+v$ و $u-v$ را بیابید.

مثال 4. فرض کنید a، b، c و d بردار دلخواه باشند. نشان دهید

$$(a\times b)\cdot(c\times d)=\begin{vmatrix} a\cdot c & b\cdot c \\ a\cdot d & b\cdot d \end{vmatrix}$$

معادله خط در فضا

معرف یافتن معادله خطی که از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ به موازات بردار $\vec{V}=ai+bj+ck$ می‌گذرد



شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه $P(x,y,z)$ روی خط فوق باشد آنست که

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel V$$

به عبارت دیگر

$$\overrightarrow{P_0P}=t\vec{V}$$

$$(x-x_0)i+(y-y_0)j+(z-z_0)k=tai+tbj+tck$$

$$\begin{cases} x-x_0=ta \\ y-y_0=tb \\ z-z_0=tc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb \\ z=z_0+tc \end{cases} \quad ,t\in\mathbb{R}$$

(معادلات پارامتری خط)

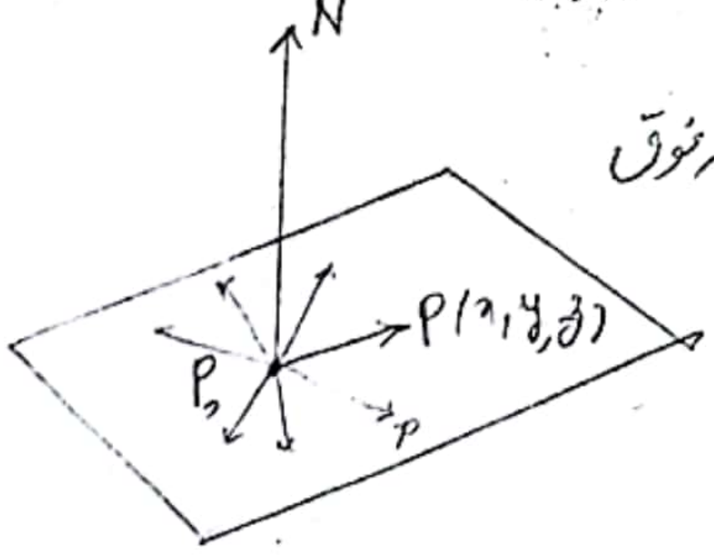
هرگاه سرکشه‌ای بردار V صفر نباشد، داریم

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b} \\ \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

(معادله کانونیک (متعارف) خط)

معادله صفحه در فضا

می‌خواهیم معادله صفحه‌ای که از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ عمود بر بردار $N=ai+bj+ck$ را بدست آوریم.



شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه $P(x,y,z)$ روی صفحه فوق قرار گیرد آنست که

$$\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{N}$$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{N}=0$$

$$[(x-x_0)i+(y-y_0)j+(z-z_0)k]\cdot[ai+bj+ck]=0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$ معادله صفحه

مثال! نشان دهید خط $l: x-2=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{4}$ موازی صفحه

$\Pi: 2y-z=1$ است. سپس، فاصله بین آن دو را بیابید.

مثال 2. دو صفحه Π_1 و Π_2 موازند. خط l آن دو را قطع کرده است. معادله کره ای را بیابید که مرکزش بر l بوده و خودش بر صفحات مماس باشد.

$$\Pi_1: x+y+z=3$$

$$\Pi_2: x+y+z=4$$

$$l: \frac{x+1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

توابع برداری

13

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2 \\ f(t)=\cos t\, i+\sin t\, j \end{cases}$$

هر تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^k$ را تابع برداری گویند.

$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$g(t)=e^t i+\ln t\, j+\sin t\, k$$
$$h:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^4$$
$$h(t)=(\ln t, e^t, \frac{1}{t}, \tan t)$$

بنابراین هر تابع برداری $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ را می‌توان به فرم زیر نمایش داد

$$f(t)=(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t))$$

که در آن f_i ها $(1\le i\le k)$ توابع حقیقی هستند. f_i ها را مولفه‌های تابع برداری f می‌نامند.

$$Df=\bigcap_{i=1}^{k} Df_i$$

حد یک تابع برداری

یادآوری (حد توابع حقیقی)

فرض کنید f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. گوییم f در a حدی مانند L دارد هرگاه

به طوری که

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall t\ (0<|t-a|<\delta \Rightarrow |f(t)-L|<\varepsilon)$$
$$0<|t-a|$$

می‌گوییم حد تابع f وقتی $t\to a$، موجود و برابر L است.

فرض کنید تابع برداری $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. هرگاه $f(t)=(f_1(t),\ldots,f_k(t))$ مانند $\vec{L}=(l_1,\ldots,l_k)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall t\ (0<|t-a|<\delta \Rightarrow |f(t)-\vec{L}|<\varepsilon)$$

آنگاه حد تابع برداری f وقتی $t\to a$ موجود و برابر $\vec{L}$ است.

$$|f(t)-\vec{L}|=\sqrt{|f_1(t)-l_1|^2+\cdots+|f_k(t)-l_k|^2}$$

نتیجه ۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ یک تابع برداری باشد و بردار $L=(l_1,\dots,l_k)$ حد تابع f در نقطه a باشد. در اینصورت حد مولفه ام تابع برداری f یعنی f_i برابر l_i است.

$$\lim_{t\to a} f_i(t)=l_i$$

$$\lim_{t\to a} f(t)=\lim_{t\to a}(f_1(t),\dots,f_k(t))=\vec{L}=(l_1,\dots,l_k)$$

اثبات.

$$\exists\delta>0\ \forall t\ (|t-a|<\delta\Rightarrow|f(t)-L|<\varepsilon)$$

i.e. $$|f(t)-L|=\sqrt{(f_1(t)-l_1)^2+\dots+(f_k(t)-l_k)^2}<\varepsilon$$

i.e.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t\ (|t-a|<\delta\Rightarrow|f_i(t)-L_i|<\varepsilon)$$

نتیجه ۲. فرض کنید مولفه های یک تابع برداری در a حد باشند. در اینصورت تابع برداری در a حد است.

$$\text{let } \lim_{t\to a} f_i(t)=l_i \Rightarrow \lim_{t\to a} f(t)=L$$

$\varepsilon>0$

$$\exists\delta>0\ \forall t\ (0<|t-a|<\delta\Rightarrow|f_i(t)-l_i|<\varepsilon/k)$$

$$|f(t)-L|=\sqrt{(f_1(t)-l_1)^2+\dots+(f_k(t)-l_k)^2}<\varepsilon$$

$$<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k}+\dots+\frac{\varepsilon^2}{k}}=\varepsilon$$

لذا شرط لازم و کافی برای آنکه تابع برداری f در a حد باشد آنست که مولفه های آن در a حد باشند.

$$\lim_{t\to a} f(t)=\lim_{t\to a}(f_1(t),\dots,f_k(t))$$

$$=\left(\lim_{t\to a} f_1(t),\dots,\lim_{t\to a} f_k(t)\right)$$

نتیجه 3. تابع برداری f در نقطه ای مانند a پیوسته است اگر و فقط اگر مولفه های آن در نقطه ی a پیوسته باشند.

نتیجه 4. شرط لازم و کافی برای آنکه تابع برداری f در نقطه ای مانند a مشتق پذیر باشد آنست که مولفه های آن در نقطه a مشتق پذیر باشند. مشتق تابع برداری f به صورت زیر است

$$f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_k'(t))$$

قاعده زنجیره ای

فرض کنید $\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ تابع مشتق پذیری از t و $t = g(s)$ تابع مشتق پذیری از s باشد. در اینصورت $\vec{F}(g(s))$ تابع مشتق پذیری از s بوده و داریم

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{d\vec{F}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = F'(g(s))\,g'(s), \quad \frac{d\vec{F}}{ds} = \left(\frac{df_1}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)\vec{i} + \left(\frac{df_2}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)\vec{j} + \left(\frac{df_3}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)\vec{k}$$

مثال 1. مشتق تابع برداری زیر را بدست آورید.

$$\vec{f}(t) = (\sin^2 t)\vec{i} + (\ln t)\vec{j} + \tan^{-1}(3t)\vec{k}$$

$$\vec{f}'(t) = (2\sin t \cos t)\vec{i} + \left(\frac{1}{t}\right)\vec{j} + \left(\frac{3}{1+9t^2}\right)\vec{k}$$

$$\vec{f}(t) = \vec{i} + \sin(t+1)\vec{j} + e^{t+1}\vec{k}$$

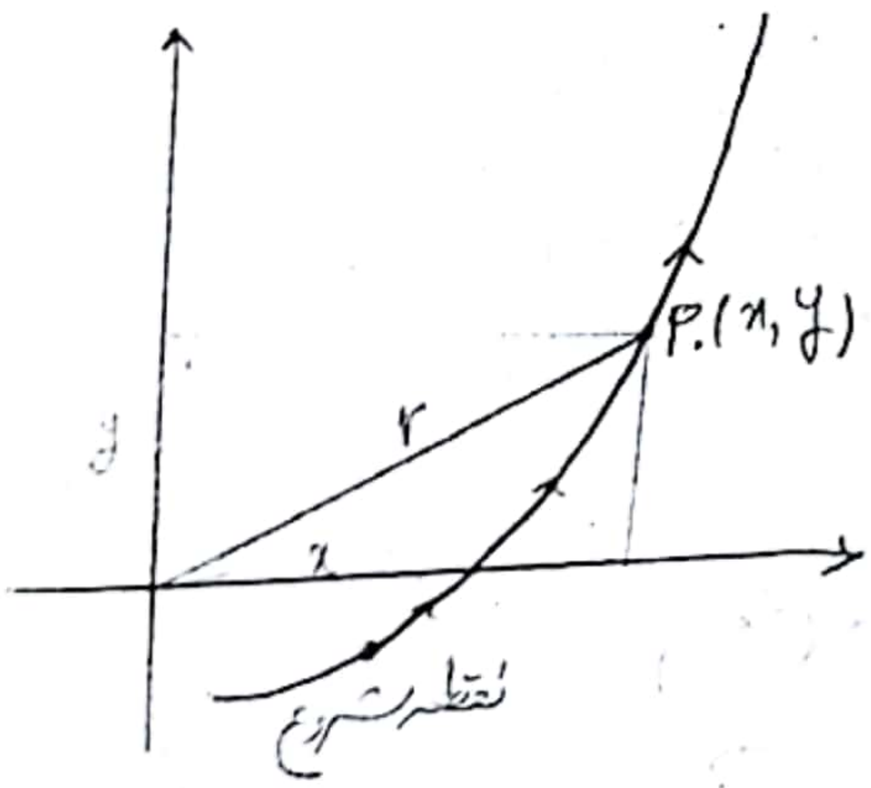
$$t = s^2 - 1$$

$$\frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \left(\cos(t+1)\vec{j} + (e^{t+1})\vec{k}\right)(2s)$$

$$= (2s\cos(s^2))\vec{j} + 2se^{s^2}\vec{k}$$

حرکت در صفحه

فرض کنید متحرک $P(x,y)$ در صفحه xy در حال حرکت باشد. بردار $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ بردار مرضع یا مکان متحرک P گویند که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابعی از زمان هستند.



فرض کنید متحرک از P_0 در بازه زمانی t تا $t+\Delta t$ از موضع $r(t)$ به موضع $r(t+\Delta t)$ حرکت کند. در اینصورت

سرعت متوسط آن عبارت است از

$$\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}$$

که بردار جابجایی برداروتر از $r(t)$ به $r(t+\Delta t)$ است. چگاه سرعت متوسط وقتی $\Delta t \to 0$ (برای حد باشد آنگاه) گوییم r در t مشتق پذیر است و این حد را سرعت (لحظه ای) متحرک از r در لحظه t نامیم.

$$\vec{V}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V}(t)=\frac{d}{dt}(x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j})=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{k}$$

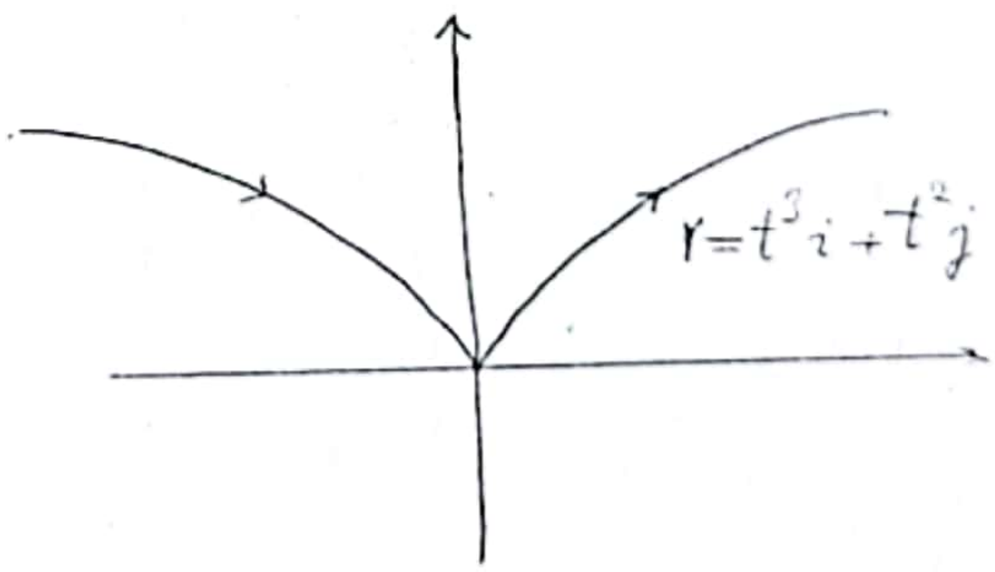
$$v(t)=|\vec{V}(t)|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

هرگاه بردار سرعت موجود، پیوسته و مخالف صفر باشد، مسیر C (مسیر حرکت ذره) یک منحنی هموار است. یعنی دارای خط مماس است که به طور پیوسته تغییر می کند. مسیر ممکن است در نقاطی که سرعت صفر است هموار نباشد حتی اگر مولفه های بردار سرعت توابع هموار از t باشند. برای مثال فرض کنید $r(t)=t^3\vec{i}+t^2\vec{j}$.

$$\begin{cases}x=t^3\\ y=t^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\sqrt[3]{x}\\ y=\sqrt[3]{x^2}\end{cases}$$

$$y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$y''=-\frac{2}{9}x^{-4/3}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}<0$$



مولفه های $V(t)$ توابع هواری از t اند ولی نقطه ای در صدا که $V=0$ هموار نیست.

بدین ترتیب، در مورد شتاب متحرک P می‌توان نوشت

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

مثال 2. ذره $P(x,y)$ بر روی منحنی $x=a\cos\omega t$ و $y=a\sin\omega t$ حرکت می‌کند که در آن a و ω ثابت‌هایی مثبت هستند. مطلوبست محاسبه سرعت و شتاب ذره.

مثال 3. جسمی در امتداد منحنی سطح $y=x^2$ با تندی ثابت $v=5$ به راست حرکت می‌کند. سرعت و شتاب جسم را وقتی در نقطه $(1,1)$ است، بیابید.

مثال 9: نیروی وارد بر ذره P به جرم m در صفحه، تابعی از زمان بوده و به صورت زیر داده شده است

$$\vec{F}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$$

اگر ذره در نقطه (2,0) با سرعت اولیه $\vec{v}_0 = \vec{j}$ شروع به حرکت کند، موضعش را در لحظه t بیابید.

قوانین مشتق توابع برداری

فرض کنید $\vec{V}(t)$, $\vec{U}(t)$ توابع برداری مشتق پذیری بوده، $\lambda(t)$ یک تابع اسکالر مشتق پذیر باشد. ثابت کنید

$U(t)+V(t)$, $U(t)\cdot V(t)$, $U(t)\times V(t)$, $\lambda(t)U(t)$ توابع مشتق پذیری از t هستند

(a) $\frac{d}{dt}(U(t)\pm V(t)) = U'(t)\pm V'(t)$

(a) برای هر بردار ثابت $\vec{C}$ داریم
$\frac{d\vec{C}}{dt}=\vec{0}$

(b) $\frac{d}{dt}(\lambda(t)U(t)) = \lambda'(t)U(t)+\lambda(t)U'(t)$

(c) $\frac{d}{dt}(U(t)\cdot V(t)) = U'(t)\cdot V(t)+U(t)\cdot V'(t)$

(d) $\frac{d}{dt}(U(t)\times V(t)) = U'(t)\times V(t)+U(t)\times V'(t)$

(e) $U(t)\neq 0$ در نقطه‌ای، $\frac{d}{dt}|U(t)| = \frac{U(t)\cdot U'(t)}{|U(t)|}$

اثبات قانون ضرب داخلی.

فرض کنید $U(t)=u_1(t)i+u_2(t)j+u_3(t)k$, $V(t)=v_1(t)i+v_2(t)j+v_3(t)k$ به این صورت است

$$\frac{d}{dt}(U\cdot V) = \frac{d}{dt}(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$$

$$= u_1'v_1+u_2'v_2+u_3'v_3+u_1v_1'+u_2v_2'+u_3v_3'$$

$$= U'\cdot V+U\cdot V'$$

اثبات قاعده ضرب خارجی

$$\frac{d}{dt}(U(t)\times V(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{U(t+h)\times V(t+h)-U(t)\times V(t)}{h}.$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{U(t+h)\times V(t+h)-U(t)V(t+h)+U(t)\times V(t+h)-U(t)\times V(t)}{h}$$

$$\frac{d}{dt}(u(t)\times v(t)) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\times v(t+h) + u(t)\times\frac{v(t+h)-v(t)}{h}\right]$$

تذکره ۱ مشتق ضرب خارجی توابع برداری

Let $f(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$

$g(t)=g_1(t)\vec{i}+g_2(t)\vec{j}+g_3(t)\vec{k}$

$\lim_{t\to t_0} f(t)=A,\ \lim_{t\to t_0} g(t)=B$

Then

$$\lim_{t\to t_0}(f(t)\times g(t)) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\times\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right) = A\times B$$

با توجه به تذکره فوق می توان نوشت

$$\frac{d}{dt}(u(t)\times v(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\times\lim_{h\to 0} v(t+h) + \lim_{h\to 0} u(t)\times\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

تذکره 2. توابع برداری مشتق پذیر و پیوسته اند.

اگر $f(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ در $t=t_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه $f(t)$ در $t=t_0$ پیوسته است.

با توجه به تذکره 2 می توان نوشت

(دقت شود مشتق تابع برداری)

$$\frac{d}{dt}(u(t)\times v(t)) = \frac{du}{dt}\times v + u\times\frac{dv}{dt}$$

نتیجه. فرض کنید $u(t)=u_1(t)\vec{i}+u_2(t)\vec{j}+u_3(t)\vec{k}$ ، $v(t)=v_1(t)\vec{i}+v_2(t)\vec{j}+v_3(t)\vec{k}$ و $w(t)=w_1(t)\vec{i}+w_2(t)\vec{j}+w_3(t)\vec{k}$ در اینصورت

$$[(u\times v).w]' = (u'\times v).w + (u\times v').w + (u\times v).w'$$

به عبارت دیگر

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix}$$

مثال 5. نشان دهید بردار $\vec{u}(t) = |\sin t|\,\vec{i} + |\cos t|\,\vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k}$ دارای طول ثابت بوده و بر مشتقش عمود است.

مثال 6. نشان دهید تنش یک ذره متحرک روی یک بازه از زمان، ثابت می‌ماند اگر و فقط اگر شتاب در سراسر بازه بر سرعت عمود باشد.

مثال 7. اگر $\vec{u}$ سه بار مشتق‌پذیر باشد، مشتق حاصل ضرب سه‌گانه

$$\frac{d}{dt}\left(u \cdot \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2}\right)\right)$$

را محاسبه کنید.

انتگرال گیری از توابع برداری

انتگرال نامعین $\vec{r}$ نسبت به t، مجموعه‌ای از تمامی پادمشتقات $\vec{r}$ است که به صورت $\int \vec{r}(t)\,dt$ نمایش داده می‌شود. اگر $\vec{R}$ یک پادمشتق از $\vec{r}$ باشد آنگاه

$$\int \vec{r}(t)\,dt = \vec{R}(t) + C$$

مثال 8.

$$\int (\cos t)\vec{i} + \vec{j} - 2t\vec{k})\,dt = (\int \cos t\,dt)\vec{i} + (\int dt)\vec{j} + (-\int 2t\,dt)\vec{k}$$

$$= (\sin t + c_1)\vec{i} + (t + c_2)\vec{j} - (t^2 + c_3)\vec{k}$$

مناسب‌تر است که مستقیماً از فرم اصلی انتگرال گیری کرده و برای هر مولفه پادمشتقی بیابید و در انتها بردار حاصل بدان بیفزائید.

اگر مولفه‌های $\vec{r}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ روی فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر باشند $\vec{r}$ نیز انتگرال پذیر است و انتگرال معین $\vec{r}$ از a تا b بصورت زیر است

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b f_2(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b f_3(t)\,dt\right)\vec{k}$$

مثال 9. نرش کنید سرعت حرکت ذره در فضا برابر باشد با

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\cos t)\vec{i} - (\sin t)\vec{j} + \vec{k}$$

مطلوبست بردار موقعیت ذره در صورتی که در لحظه $t=0$ موقعیت به صورت بردار $r = 2i + k$ باشد.

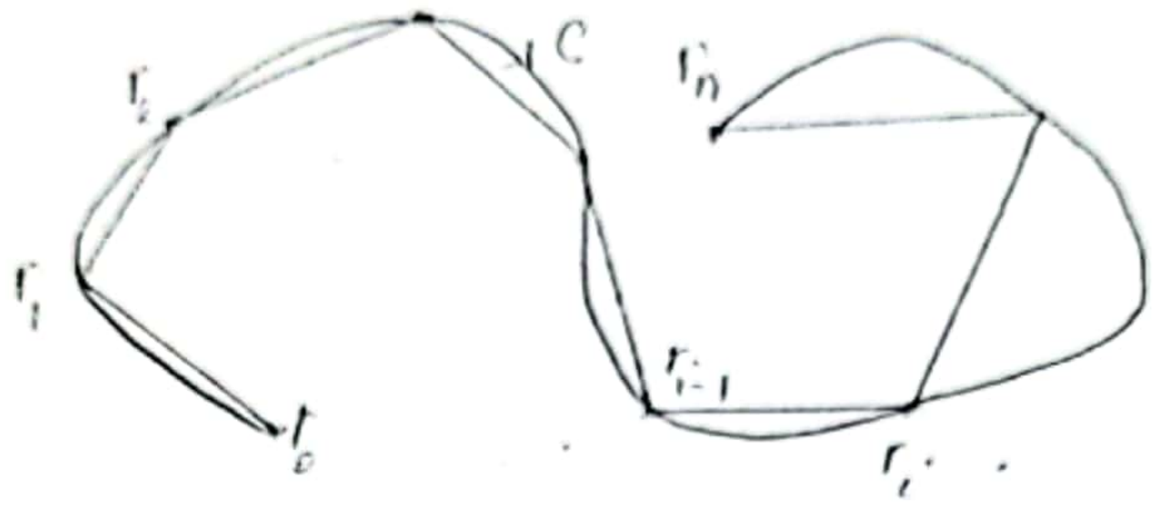
$$\vec{r}(t) = (\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{r}(0) = 2\vec{i} + \vec{k} = \vec{j} + C \Rightarrow C = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (\sin t + 2)\vec{i} + (\cos t - 1)\vec{j} + (t+1)\vec{k}$$

طول قوس

فرض کنید C یک منحنی کراندار و پیوسته باشد که با $a \le t \le b$ ، $r = r(t)$ مشخص می‌شود. بازه بسته $[a,b]$ را با نقاط $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ به n زیربازه تقسیم کنید



در اینصورت نقاط $r_i = r(t_i)$ ، $i = 1, \dots, n$ منحنی C را به n قوس تقسیم می‌کند. هرگاه از طول وتر $|r_i - r_{i-1}|$ به عنوان تقریبی برای طول قوس بین نقاط r_{i-1} و r_i استفاده کنیم آنگاه مجموع $S_n = \sum_{i=1}^{n} |r_i - r_{i-1}|$ طول C را به وسیله طول یک چندضلعی تقریب می‌زند. واضح است که هر چنین تقریب از طول واقعی C کوچکتر یا مساوی است.

(گوییم C با طول متناهی است اگر ثابتی مانند K باشد به طوری که به ازای هر n و هر انتخاب نقاط t_i ، $S_n \le K$. در این حالت اصل موضوع تمامیت دستگاه اعداد حقیقی به ما اطمینان می‌دهد که کوچکترین عدد K از این نوع وجود دارد. این K ی مینیمم را طول C نامیده و با S نشان می‌دهیم.)

فرض کنید $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ، $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. در این صورت S_n را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta r_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

هرگاه $r(t)$ دارای مشتق پیوسته $v(t)$ باشد آنگاه خواهیم داشت

$$S \text{ (طول قوس)} = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} S_n = \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b |\vec{v}(t)|\, dt = \int_a^b v(t)\, dt$$

در بازه $[a,t]$ است C طول قوس آن قسمت از $s(t)$ باشد که نظیر مقادیر پارامتری در

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t v(z)\,dz = v(t)$$

لذا عنصر طول قوس برای C مساوی است با

$$ds = \underbrace{v(t)}_{|v(t)|}dt = \left|\frac{d}{dt}r(t)\right|dt$$

$$C \text{ طول } = \int_C ds = \int_a^b |v(t)|dt = \int_a^b v(t)\,dt$$

به عنوان مثال عنصر طول قوس ds برای منحنی مسطح دکارتی $y=f(x)$ بر $[a,b]$ را می‌توان با استفاده از x به عنوان پارامتر بدست آورد.

$$\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j} \\ \vec{r}=t\,\vec{i}+f(t)\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = \vec{i} + f'(t)\vec{j}$$

$$\text{(عنصر طول قوس) } ds = |v(t)|dt = \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt \quad , \quad \underset{\text{طول قوس}}{S} = \int_a^b |v(t)|dt = \int_a^b \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$$

به همین نحو، عنصر طول قوس ds برای منحنی قطبی مسطح $r=g(\theta)$ قطبی به صورت زیر است

(برداری) $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$

$\theta=t$ $\begin{cases} x=r\cos\theta = g(\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta \end{cases}$ $\Rightarrow \vec{r} = g(\theta)\cos\theta\,\vec{i} + g(\theta)\sin\theta\,\vec{j}$

$$\vec{r}(t) = g(t)\cos t\,\vec{i} + g(t)\sin t\,\vec{j}$$

$$ds = |\vec{v}(t)|dt = \sqrt{(g'(t)\cos t - g(t)\sin t)^2 + (g'(t)\sin t + g(t)\cos t)^2}\;dt$$

$$ds = \sqrt{[g(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

لذا

$$s = \int_a^b \sqrt{[g(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

مثال. طول (محیط) دایره‌ای به شعاع a را به دست آورید.

مثال. طول آن قسمت از مارپیچ مستدیر $\vec{r} = (a\cos t)\vec{i} + (a\sin t)\vec{j} + (bt)\vec{k}$ را که بین نقاط $(a, 0, 0)$ و $(a, 0, 2\pi b)$ قرار دارد، بیابید.

بردار یکه مماس

فرض کنید $s(t)$ طول قوس در امتداد منحنی C باشد که از نقطه بنا $P(t_0)$ سنجیده می‌شود. داریم

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)| \quad \left(\frac{ds}{dt} \text{ در یک منحنی هموار } |v| \text{ همواره مخالف صفر است. لذا } > 0\right)$$

در اینصورت

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}$$

لذا بنا به قاعده زنجیره ای برای مشتق داریم

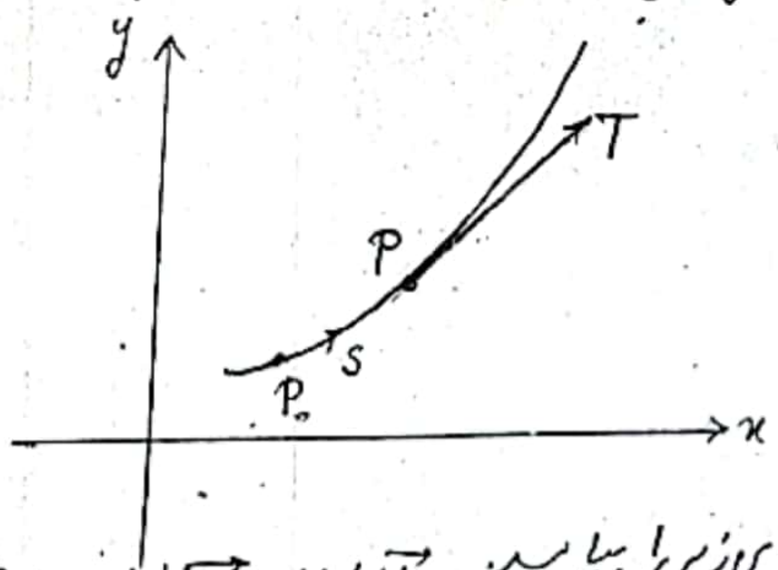
$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \vec{v}(t) \cdot \frac{1}{|\vec{v}(t)|}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\vec{v}(t)\right| \left|\frac{dt}{ds}\right| = 1$$

بنابراین بردار $\frac{d\vec{r}}{ds}$ همواره یک بردار یکه است. همچنین هم علامت با بردار $\vec{v}$ خواهد بود. زیرا ضرب اسکالر مثبت $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{v}|}$ در $\vec{v}$ است.

$\frac{d\vec{r}}{ds}$ را بردار یکه مماس منحنی نامیده و با $\vec{T}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $\vec{T}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$



مثال. بردار یکه مماس منحنی‌های زیر را بیابید.

(a) $\vec{r}(t) = (a\cos\omega t)\vec{i} + (a\sin\omega t)\vec{j} + (bt)\vec{k}$

(b) $\vec{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\vec{i} + (\sin t - t\cos t)\vec{j}$, $t \geq 0$

(a) $\vec{v}(t) = (-a\omega\sin\omega t)\vec{i} + (a\omega\cos\omega t)\vec{j} + b\vec{k}$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(a\omega\sin\omega t)^2 + (a\omega\cos\omega t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{(-a\omega\sin\omega t)\vec{i} + (a\omega\cos\omega t)\vec{j} + b\vec{k}}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}$$

(b)

$$\vec{T} = \frac{(-\sin t + \sin t + t\cos t)\vec{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\vec{j}}{\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}} = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$$

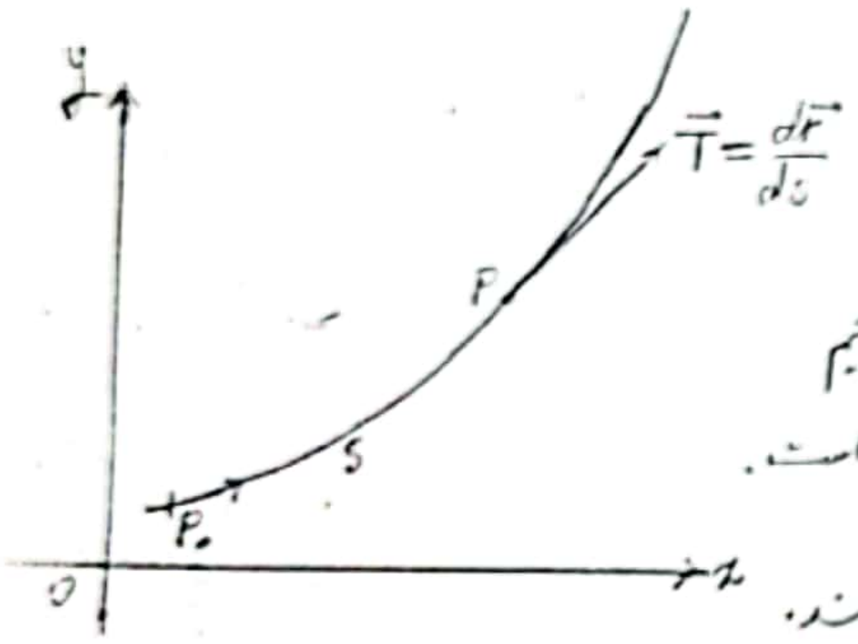
بردار یکه مماس

انحنا، تاب و قاب TNB

در این بخش به تعریف قاب بردارهای یکه متعامد که همواره با جسم متحرک در طول منحنی در فضا حرکت می‌کند می‌پردازیم

قاب سه بردار دارد. اولین بردار، بردار یکه مماس T است. بردار دوم N، بردار یکه‌ای است که جهت $\frac{dT}{ds}$ را بیان می‌کند و سومین بردار $B = T \times N$ است. این بردارها و مشتقاتشان هنگامی که در دسترس هستند، T و N مفیدی در مورد تعیین موقعیت وسیله نقلیه در فضا و چگونگی انحنا و تاب مسیر آن را نتیجه می‌دهند.

برای مثال، $\left|\frac{dT}{ds}\right|$ بیان می‌کند که هنگام حرکت وسیله نقلیه، مسیرش چه اندازه به چپ یا راست منحرف می‌گردد که آن را انحنای مسیر وسیله نقلیه می‌نامیم. عدد $-\left(\frac{dB}{ds}\right) \cdot N$ بیان می‌کند که هنگامی که وسیله نقلیه در مسیرش جابجا می‌شود، چه مقدار مسیر آن در خارج صفحه حرکت، تاب می‌خورد که آن را تاب مسیر می‌نامیم.



انحنای یک منحنی مسطح

میزان چرخش $\vec{T}$ وقتی در امتداد منحنی حرکت می‌کنیم را با تغییر φ می‌سنجیم که در آن φ زاویه بین $\vec{T}$ و $\vec{i}$ است.

در هر نقطه قدر مطلق $\frac{d\varphi}{ds}$ را انحنای منحنی می‌نامند.

(هنگامی که ذره‌ای در طول یک منحنی هموار در صفحه جابجا می‌شود، T همراه با منحنی تغییر جهت می‌دهد. از طول T که بردار یکه است، ثابت می‌ماند و تنها جهتش همراه با حرکت منحنی تغییر می‌کند. آهنگ گردش T بازای هر واحد حرکت بر روی مسیر، انحنا یا خمیدگی خم نامیده می‌شود.)

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

فرض کنید منحنی C به صورت $y = f(x)$ باشد در اینصورت

$$K = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$$

$$\left(T = \frac{dr}{ds} \quad \left(\frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j}\right) \quad \tan\varphi = \frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{dy}{dx} \right)$$

اثبات.

$$\tan\varphi = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| , \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2y/dx^2}{1+(dy/dx)^2}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \Rightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}$$

$$ds = |v(t)|dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

لذا می توان نوشت

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$$

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$$

طبیعی است برای منحنی مسطح $x=g(y)$ داریم

$$K = \frac{|x''|}{\left[1+(x')^2\right]^{3/2}}$$

حال فرض کنید منحنی C به صورت پارامتری $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ باشد. در اینصورت انحنای منحنی به صورت زیر است

$$K = \frac{|\dot{y}\ddot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{(d^2y/dt^2)(dx/dt) - (\frac{d^2x}{dt^2})(\frac{dy}{dt})}{(dx/dt)^2}}{1+\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} = \frac{\dot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}$$

بنابراین

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \frac{|\dot{y}\ddot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{\left[(\dot{x})^2+(\dot{y})^2\right]^{3/2}}$$

مثال. نشان دهید انحنای خط مستقیم صفر است.

$$y = ax+b$$

$$y''=0 \Rightarrow K=0$$

مثال. انحنای دایره $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$ را بیابید.

$$K = \frac{|(-a\sin\theta)(-a\sin\theta) - (-a\cos\theta)(a\cos\theta)|}{\left[(-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2\right]^{3/2}} = \frac{|a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)|}{(a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}.$$

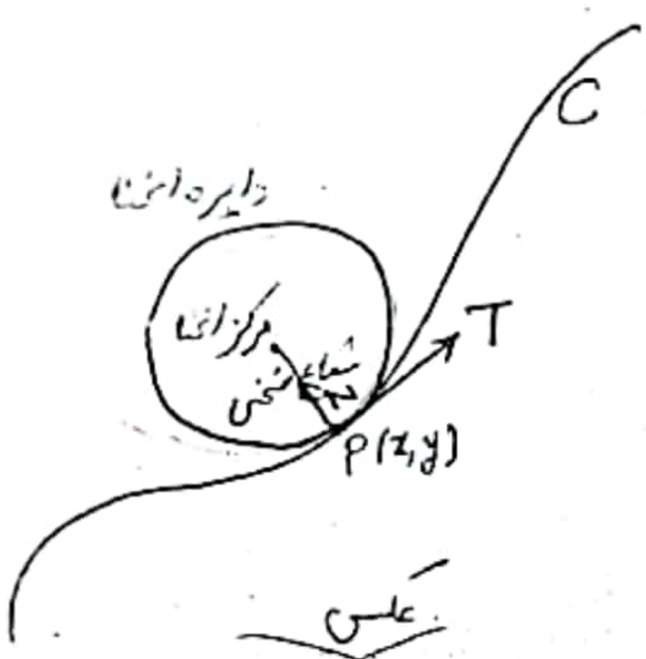
دایره انحنا و شعاع انحنا

دایره انحنا (بوسان) در نقطه P بر یک منحنی مسطح که در آن $K \neq 0$، دایره‌ای در صفحه منحنی است که

(i) بر منحنی در نقطه P مماس است (خط مماسش همان خط مماس منحنی است.)

(ii) انحنای آن برابر انحنای منحنی در نقطه P است.

(iii) در طرف تقعر یا قسمت گودی (داخلی) منحنی قرار داشته باشد:

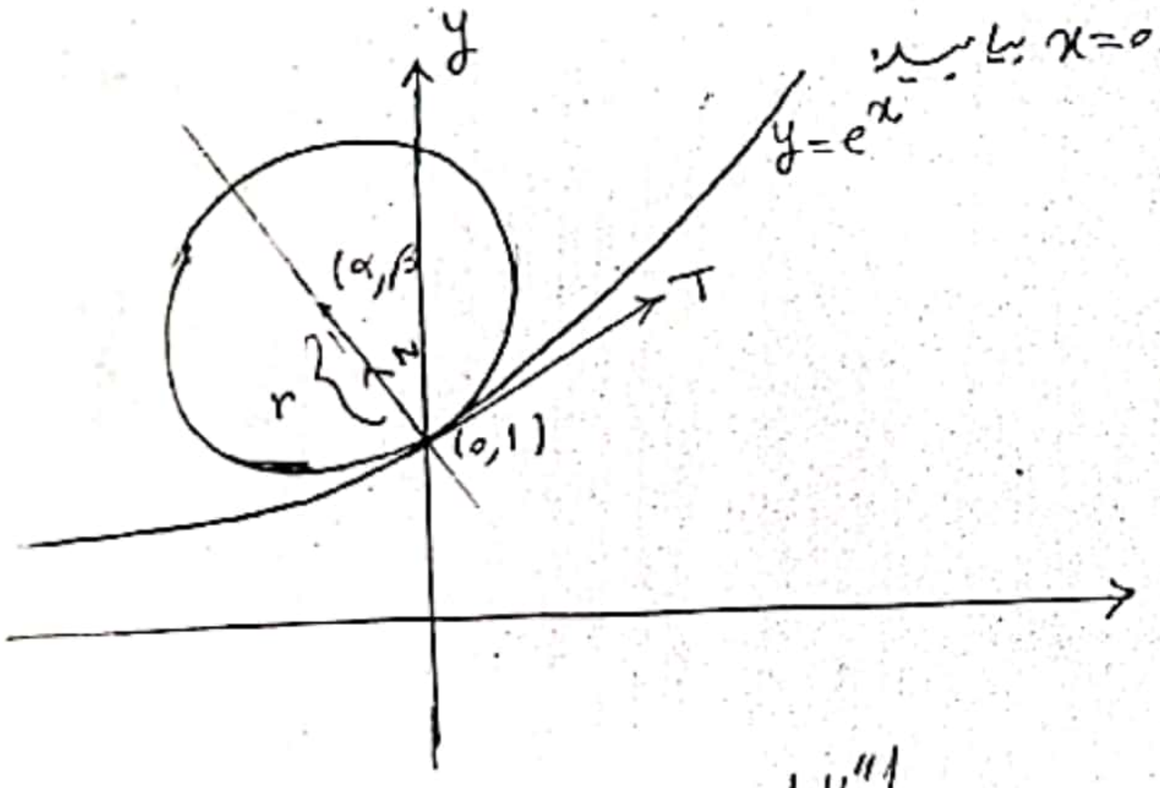


(شعاع بر مماس در نقطه تماس عمود است $\Rightarrow$ مرکز دایره روی قائم بر منحنی است.)

شعاع انحنای منحنی در نقطه P شعاع دایره انحناست. از طرفی شعاع دایره انحنا برابر (عکس) انحنای منحنی است. لذا

شعاع انحنا: $\rho = \frac{1}{K}$

مثال. دایره انحنای منحنی $y = e^x$ را در نقطه $x=0$ بیابید.



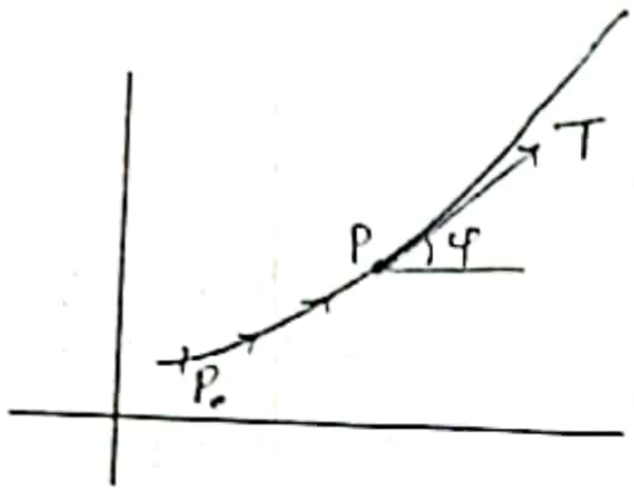
$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{1}{K} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} (0-\alpha)^2 + (1-\beta)^2 = 8 \\ m_{ق} = \frac{1-\beta}{0-\alpha} = -\frac{1}{m_{م}} = -1 \Rightarrow \alpha+\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2-2\beta+1 = 8 \\ \alpha+\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \beta = -1 \text{ غ ق ق} \\ \alpha = -2, \beta = 3 \end{cases}$$

$y \neq -1$ (تقعر رو به بالا) و دایره بوسان باید در تقعر منحنی باشد.

مثال. در چه نقطه‌ای از خم $y = e^x$، شعاع انحنا کمترین مقدار را دارد.

بردار یکه قائم



بردار یکه مماس $\vec{T}$ را می‌توان برحسب φ به صورت زیر نوشت

$$\vec{T} = (\cos\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi)\vec{j}$$

بنابراین

$$\frac{d\vec{T}}{d\varphi} = (-\sin\varphi)\vec{i} + (\cos\varphi)\vec{j} = \left(\cos(\varphi+\tfrac{\pi}{2})\right)\vec{i} + \left(\sin(\varphi+\tfrac{\pi}{2})\right)\vec{j}$$

$$\left|\frac{d\vec{T}}{d\varphi}\right| = 1$$

یعنی $\frac{d\vec{T}}{d\varphi}$ بردار یکه حاصل از دوران $\vec{T}$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ رادیان در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

لذا $\frac{d\vec{T}}{d\varphi}$ در هر لحظه بر منحنی عمود است. با توجه به قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds}$$

و $\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{T}}{d\varphi}\right|\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = 1\cdot K = K$ (K رابطه پیدا کرم برای)

بنابراین بردار $\frac{d\vec{T}}{ds}$ بر منحنی عمود است زیرا ضرب اسکالری از $\frac{d\vec{T}}{d\varphi}$ است.

بردار یکه $\vec{N}$ حاصل از تقسیم $\frac{d\vec{T}}{ds}$ بر طویلش (K)، بردار یکه قائم اصلی منحنی نامیده می‌شود.

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|} = \frac{1}{K}\cdot\frac{d\vec{T}}{ds},\quad K\neq 0$$

اگر در نقطه P_0، $K=0$ (انحنا صفر) آن‌گاه

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{N}\cdot K = 0$$

بنابراین قائم منحنی بردد وجود ندارد.

برای محاسبه $\vec{N}$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\vec{N} = \frac{1}{K}\cdot\frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{K}\cdot\frac{d\vec{T}/dt}{|\vec{v}|}$$

حال به بررسی خم هموار $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ می پردازیم

چون $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = 1$ برای هری، با مشتق گیری نسبت به s داریم

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T}$$

دو حالت می توان در نظر گرفت

(i) اگر $\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$ ، در این حالت $\kappa(s)$ را صفر تعریف می کنیم.

(ii) اگر $\frac{d\vec{T}}{ds} \neq 0$ ، در این حالت $\frac{d\vec{T}}{ds}$ بست مشخص عمود بر $\vec{T}$ مشخص می کند.

تعریف می کنیم

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|, \quad \vec{N} = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\vec{T}}{ds}$$

مثال. N و κ را برای

$$\vec{r}(t) = (a\cos\omega t)\vec{i} + (a\sin\omega t)\vec{j} + (bt)\vec{k}$$

بیابید.

مثال. نشان دهید برای

$$\vec{r}(t) = (a\cos\omega t)\vec{i} + (a\sin\omega t)\vec{j} + (bt)\vec{k}$$

داریم $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$ (در حالت کلی برای هر خمی برقرار است).

تاب و بردار قائم دوم

برای تکمیل کنج متحرک (دستگاه مختصات متحرک وابسته به γ) بردار سوم $\vec{B}$ را به صورت $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ درنظر می‌گیریم. چون $\vec{B}$ بر $\vec{T}$ عمود است، $\vec{B}$ نیز در صفحه عمود بر خم در نقطه $\gamma(s)$ قرار دارد. گاهی $\vec{N}$ را قائم واحد اول (قائم واحد اصلی) و $\vec{B}$ را قائم واحد دوم می‌نامند.

$\vec{T}$، $\vec{N}$ و $\vec{B}$ باهم نقش یک کنج (قاب ـ دستگاه) راستگرد را بازی می‌کنند (کنج فرنه) و در محاسبه مسیر پرواز یک وسیله نقلیه فضایی نقش مهمی به عهده دارند.

آهنگ تغییرات $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ نسبت به s را بررسی می‌کنیم، با این امید که کمیت‌هایی که به دست می‌آیند گویای شکل کامل تصویر خم باشند. شکل کلی باید چنین باشد

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds}=a_{11}\vec{T}+a_{12}\vec{N}+a_{13}\vec{B}, \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds}=a_{21}\vec{T}+a_{22}\vec{N}+a_{23}\vec{B}, \\ \dfrac{d\vec{B}}{ds}=a_{31}\vec{T}+a_{32}\vec{N}+a_{33}\vec{B}, \end{cases}$$

که در آن a_{ij} ها توابعی نسبت به s هستند. تاکنون طبق تعریف داریم

$$a_{11}=a_{13}=0, \qquad a_{12}(s)=K(s)$$

به بررسی شش ضریب ردیف‌های دوم و سوم می‌پردازیم. اگر از $\vec{N}(s)\cdot\vec{N}(s)=1$ و $\vec{B}(s)\cdot\vec{B}(s)=1$ مشتق بگیریم (نسبت به s)، نتیجه می‌شود که

$$\frac{d\vec{N}}{ds}\cdot\vec{N}=0, \qquad \frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{B}=0$$

در نتیجه $a_{22}=0$ و $a_{33}=0$.

همچنین از $\vec{T}(s)\cdot\vec{B}(s)=0$، با مشتق‌گیری نسبت به s نتیجه می‌شود که

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\vec{B}+\vec{T}\cdot\frac{d\vec{B}}{ds}=0 \Rightarrow a_{13}+a_{31}=0$$

ولی $a_{13}=0$، پس $a_{31}=0$. بدین ترتیب، علاوه بر دو ضریب سطر اول، ضرایب a_{22}، a_{31} و a_{33} نیز صفر هستند. حال، با مشتق‌گیری از $\vec{T}\cdot\vec{N}\equiv 0$ و $\vec{N}\cdot\vec{B}\equiv 0$ به روشی مشابه بالا نتیجه می‌گیریم که

$$a_{21}+a_{12}=0, \qquad a_{32}+a_{23}=0$$

چون $a_{12}=\kappa$، داریم $a_{21}=-\kappa$. ضریب تابعی a_{23} را با τ نمایش می‌دهیم و تاب می‌نامیم. پس

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} = \qquad\qquad +\kappa\vec{N} \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} \qquad\qquad +\tau\vec{B} \\ \dfrac{d\vec{B}}{ds} = \qquad\qquad -\tau\vec{N} \end{cases} \qquad (1)$$

لازم به تاکید است تعریف $\vec{N}$، $\vec{B}$ و τ و برقراری سطرهای دوم و سوم (1) وابسته به فرض $\kappa\neq 0$ است. یک خم هموار در $\mathbb{R}^3$ که در سراسر آن $\kappa\neq 0$، خم فرنه خوانده می‌شود. کنج متحرک $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ یک کنج فرنه و روابط (1) معادلات فرنه نامگذاری شده‌اند.

κ ضریب $\vec{N}$ در رابطه (1)، آهنگ تغییر $\vec{T}$ نسبت به s می‌باشد.

τ شاخص "تقابل" یک خم فضایی به خروج از صفحه مسطح است.

صفحه بوسان. فرض کنید $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ لا یک خم فرنه باشد. در این صورت در هر نقطه بردار $\vec{N}$ تعریف شده است. زوج مستقیم $(\vec{T}, \vec{N})$ یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ ایجاد می کنند. این صفحه را صفحه بوسان لا در نقطه مربوط می نامند. به تعابیر مختلف می توان گفت این صفحه "نزدیکترین" صفحه به تصویر خم است.

همان طور که ملاحظه شد شرط لازم و کافی برای $\tau \equiv 0$ این است که تصویر لا بر تمامی در صفحه بوسان بماند. هر صفحه شامل امتداد $\vec{T}(t)$ را می توان صفحه ای مماس بر تصویر لا در نقطه $\alpha(t)$ تلقی کرد. از بین این صفحات، صفحه بوسان "مماس ترین" این صفحه هاست.

تعبیر فیزیکی زیر نیز از صفحه بوسان قابل توجه است:

همان طور که در صفحه قبل ملاحظه شد، بردار شتاب $\vec{a}$ را می توان در راستاهای تعیین شده توسط $\vec{T}$ و $\vec{N}$ تجزیه کرد، یعنی:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N}$$

یعنی $\vec{a}(t)$ همواره در صفحه بوسان قرار می گیرد (با توجه به رابطه $\vec{N} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$ ، $\vec{v}$ نیز در صفحه بوسان قرار می گیرد). بنابراین، برای هر حرکت فیزیکی ممکن روی تصویر خم لا، بردارهای سرعت و شتاب همواره در صفحه بوسان می مانند.

مثال. ایستار و تاب مارپیچ دوار $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ که درآن

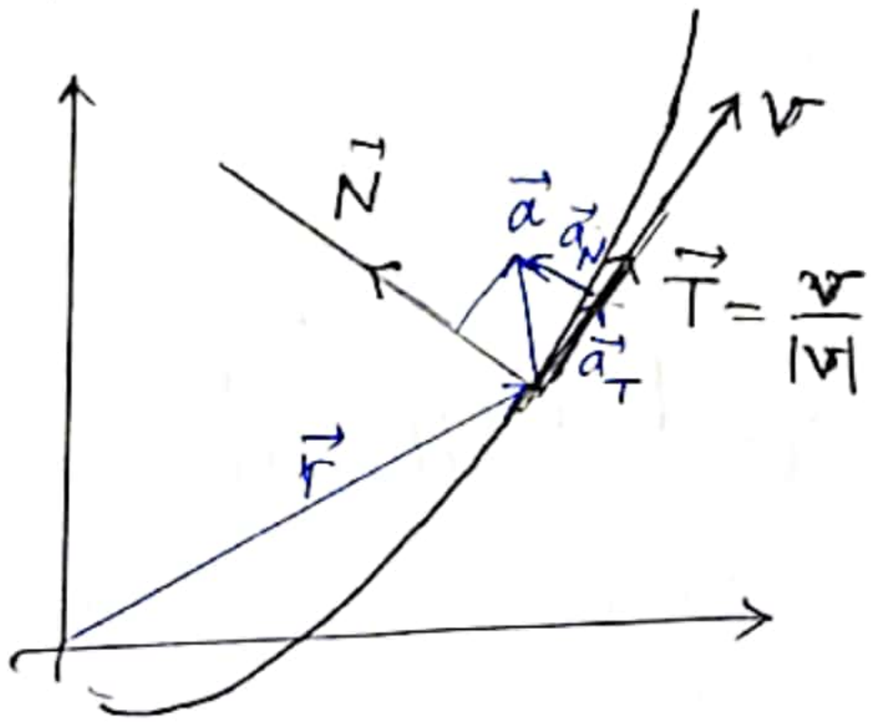
$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad a>0, \quad a,b \in \mathbb{R},$$

را بدست آورید.

مثال. برای خم فرنه $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ، نشان دهید $\tau \equiv 0$ اگر و تنها اگر تصویر α به تمامی، روی یک صفحه قرار داشته باشد.

مولفه‌های مماسی و قائم سرعت و شتاب

فرض کنید بخواهیم بردارهای سرعت و شتاب را در دستگاه $\vec{T}$ و $\vec{N}$ بنویسیم

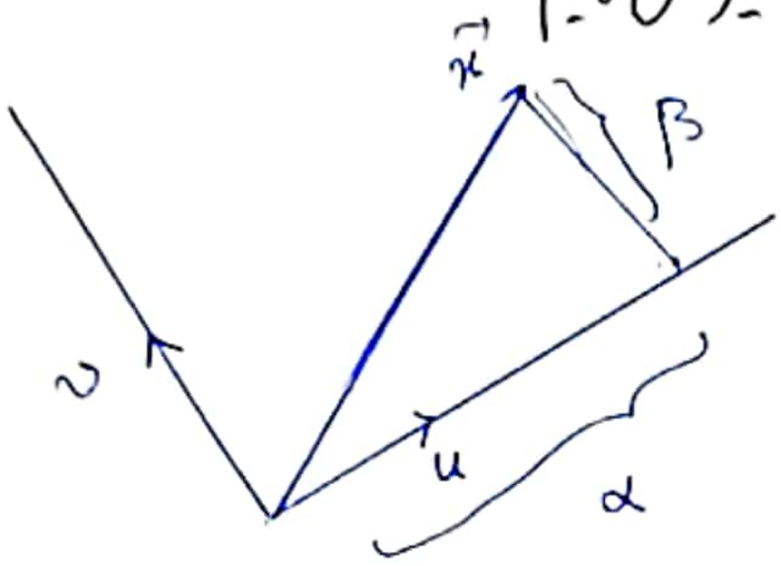


این حالت برای هر خم فضایی (نه فقط مسطح) برقرار است.

$$\vec{v} = v_T \vec{T} + v_N \vec{N}$$

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$$

فرض کنید $\vec{x}$ یک بردار معلوم با شد. هرگاه بخواهیم مولفه‌های آن را در یک دستگاه مختصات دوبعدی مانند $\vec{u}$ و $\vec{v}$ به دست آوریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم



$$\alpha = \left|\text{Proj}_{\vec{u}}\vec{x}\right| = \frac{|\vec{x}\cdot\vec{u}|}{|\vec{u}|} = |\vec{x}\cdot\vec{u}|$$

$$\beta = \left|\text{Proj}_{\vec{v}}\vec{x}\right| = \frac{|\vec{x}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = |\vec{x}\cdot\vec{v}|$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{\vec{V}}{ds/dt} \Rightarrow \vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T} + o\vec{N}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \kappa v^2\vec{N}$$

$$\left(\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa v\vec{N}\frac{ds}{dt} = \kappa v^2\vec{N}\right)$$

فرمولی دیگر برای انحنا و تاب یک منحنی

با توجه به روابط حاصل برای $\vec{T}, \vec{N}$ داریم

$$\vec{v} \times \vec{a} = \left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) \times \left[\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N}\right]$$

$$= \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}\times\vec{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \vec{T}\times\vec{N}$$

$$= \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \vec{B}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}\times\vec{a}| = \kappa\left|\frac{ds}{dt}\right|^3 |\vec{B}| = \kappa|\vec{v}|^3$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

همچنین

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}\times\vec{a}}{\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = \frac{\vec{v}\times\vec{a}}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$$

به آسانی می‌توان نشان داد

$$\tau = \frac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2}$$

مثال. انحنا کعنی $\vec{r}(t)=(-3\sin 2t)\vec{i}+(-3\cos 2t)\vec{j}$ را بدست آورید.

مثال. معادله برداری متحرک P عبارت است از

$$\vec{r}(t) = (\sin 2t)\vec{i} + (\cos 2t)\vec{j} + t^2\vec{k}.$$

بردارهای $\vec{v}$، $\vec{a}$، $\vec{T}$ و $\vec{N}$، را در لحظه $t=\frac{\pi}{6}$ به دست آورید.

مثال. انحناء، تاب، و کنج فرنه را در یک نقطه دلخواه از منحنی

$$\vec{r}(t) = (t + \cos t)\,\vec{i} + (t - \cos t)\,\vec{j} + (\sqrt{2}\sin t)\,\vec{k},$$

به دست آورید.

توابع چند متغیره

فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. می‌خواهیم تابع‌هایی $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را بررسی کنیم. یعنی ترتیب f به هر n تایی $(x_1, \dots, x_n)$ یک m تایی $f(x) = y = (y_1, \dots, y_m)$ نسبت می‌دهد.

$$y = f(x)$$

هر y_i خود به $(x_1, \dots, x_n) = x$ وابسته است و می‌توان f را متشکل از m تابع $f_i: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ دانست

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

در اینصورت $f = (f_1, \dots, f_m)$، هر f_i را یک مولفه‌ی f می‌نامیم.

اگر $D \subseteq \mathbb{R}$ یعنی $n = 1$ و $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$، یعنی $m = 1$، عادت داریم که از نمودار f یعنی زیرمجموعه‌ی $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ از $\mathbb{R}^2$ برای تجسم تابع استفاده کنیم. بسیاری از خاصیت‌ها را می‌توان با نگاه کردن به نمودار f خصوصیات رفتاری آن به سادگی دریافت. در مورد تابع‌های $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $D \subseteq \mathbb{R}^n$، به بررسی سه روش نمودار، تصویر و مجموعه تراز برای تجسم هندسی رفتار تابع می‌پردازیم.

حالت خاص.

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$. در اینصورت تابع f از n متغیر حقیقی قاعده‌ای است که به هر نقطه $(x_1, \dots, x_n) \in D$ عدد حقیقی منحصر بفردی مانند $f(x_1, \dots, x_n)$ نسبت می‌کند.

اغلب مثال‌هایی که در این فصل در نظر می‌گیریم توابعی از دو یا سه متغیر مستقل اند. وقتی تابع f به دو متغیر بستگی دارد معمولاً این متغیرهای مستقل را x و y می‌نامیم و z متغیر وابسته است که مقدار تابع را نشان می‌دهد. یعنی $z = f(x, y)$.

$$w = f(x, y, z)$$

نمودار

نمودار تابع یک متغیره f مجموعه‌ی نقاطی در صفحه xy به مختصات $(x, f(x))$ است که x در قلمرو f می‌باشد. به همین نحو، نمودار تابع دو متغیره f مجموعه نقاط در فضای سه بعدی به مختصات $(x, y, f(x,y))$ است که (x,y) به قلمرو f تعلق دارد. این نمودار یک سطح در $\mathbb{R}^3$ است که بالا (اگر $f(x,y)>0$) یا پایین (اگر $f(x,y)<0$) قلمرو f در صفحه xy قرار دارد. نمودار یک تابع سه متغیره یک ابرسطح سه بعدی در فضای $\mathbb{R}^4$ می‌باشد و در حالت کلی، نمودار یک تابع n متغیره یک سطح n بعدی در فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ است.

همچنین برای تابع $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$، نمودار f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\{(x, f(x)) : x \in D\}$$

توجه کنید که $x=(x_1, \dots, x_n)$ یک n تایی و $f(x)=(f_1(x), \dots, f_m(x))$ یک m تایی است، بنابراین هر نقطه نمودار یک $m+n$ تایی است یعنی نمودار یک زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}^{n+m}$ است. این نکته اشکال استفاده از نمودار در ابعاد بالا را روشن می‌سازد. وقتی $m+n$ از 3 بزرگتر باشد نمی‌توان از نیروی باصره برای تجسم نمودار و مشاهده رفتار تابع یاری جست. استفاده از نمودار معمولاً به حالت‌های $m=n=1$ و $m=1, n=2$ محدود است. در حالت $m=2, n=1$ که مربوط به خم‌های پارامتری در صفحه می‌شود روش تصویر معمولاً مناسب‌تر است.

مثال ۱. تابع $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y)=ax+by+c$ در نظر بگیرید که در آن a، b، c اعداد حقیقی‌اند. اگر مقدار $f(x,y)$ را با z نمایش دهیم، نمودار تابع عبارت است از مجموعه‌ی

$$\{(x,y,z) : z=ax+by+c\}$$

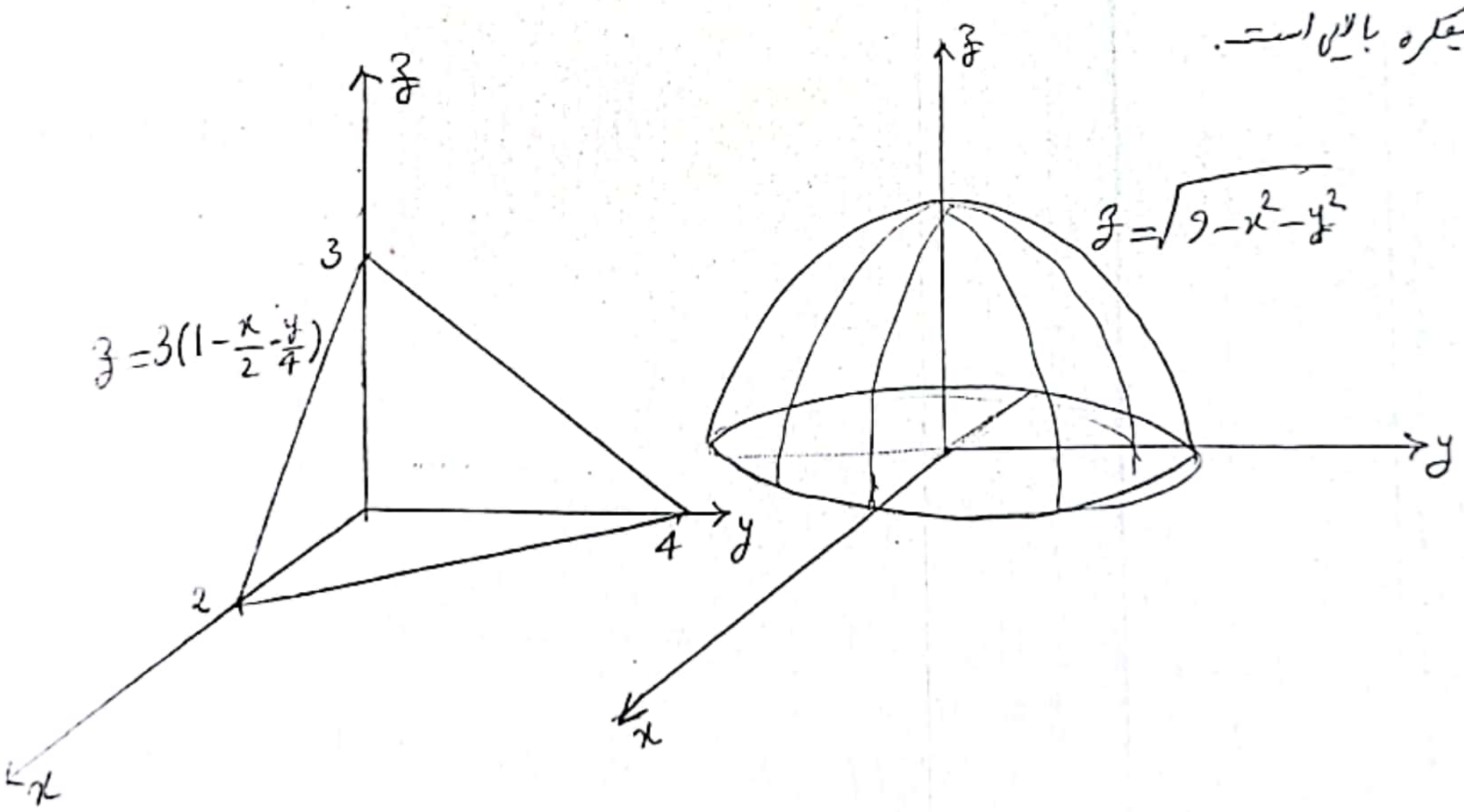
بدین ترتیب نقاط روی نمودار دقیقاً نقاطی هستند که در رابطه $ax+by-z+c=0$ صدق می‌کنند. این مجموعه یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ است که با محور z موازی نیست (بر صفحه xy عمود نیست).

مثال 2. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را بصورت $f(x,y)=x^2+y^2$ تعریف می‌کنیم. قرار دهید $z=f(x,y)$.
در اینصورت نسبت به مختصات قطبی داریم $z=r^2$، یعنی نقاط نمودار، (x,y,z)، به این ترتیب بدست
می‌آیند که اگر xy را صفحه افقی و محور zها را عمود بر آن تصور کنیم، نقطه‌ی (x,y,z) که بالاسر (x,y)
قرار دارد، ارتفاعش از صفحه xy برابر مجذور فاصله‌ی (x,y) از مبدا است. بدین ترتیب
نمودار f از دوران دادن یک سهمی حول محور zها بدست می‌آید.

مثال 3.
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x,y)=3\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)$$
$$\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4-2x\}$$

نمودار f سطح مثلثی مسطح بارئوس $(2,0,0)$، $(0,4,0)$ و $(0,0,3)$ است.
اگر تابع f به طور صریح به صورت مجموعه‌ی خاصی در صفحه xy بیان نشده بود، منظور تمام صفحه‌ی xy بر این
سه نقطه بود.

مثال 4. $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ را در نظر بگیرید. عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد. در نتیجه دامنه تابع
قرص $x^2+y^2\le 9$ در صفحه xy است. از طرفی $z^2+x^2+y^2=9$. لذا نمودار تابع f فقط
نیمکره بالایی است.



حد و پیوستگی

مفهوم حد تابع دو متغیره شبیه حد تابع یک متغیره است. برای روشن بودن وضع، تعریف را برای حالت دو متغیره ارائه می دهیم. حالت کلی شبیه خواهد بود.

می توان گفت وقتی نقطه (x,y) به نقطه (a,b) نزدیک می شود، $f(x,y)$ به عدد L نزدیک می گردد و می نویسیم

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

اگر همه نقاط هر همسایگی از (a,b) جز احتمالاً خود نقطه (a,b) تعلق به قلمرو f داشته باشند و وقتی (x,y) به (a,b) نزدیک می شود، $f(x,y)$ به L نزدیک گردد. به عبارت دیگر گوییم $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ مشروط بر اینکه

(i) هر همسایگی (a,b) را شامل نقاطی از قلمرو f مخالف (a,b) بود، (f در یک همسایگی (a,b) تعریف شده باشد)

(ii) برای هر عدد مثبت ε عدد مثبتی مانند $\delta=\delta(\varepsilon)$ باشد به طوری که هروقت (x,y) در قلمرو f بوده و در $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ صدق کند، $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ برقرار باشد.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall (x,y)\ \left(0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon\right)$$

or

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\ \forall (x,y)\ \left(0<|x-a|<\delta,\ 0<|y-b|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon\right)$$

شرط (ii) به این خاطر در تعریف گنجانده شده که توجه به حدود در نقاط تنهای قلمرو f (نقاطی که با همسایگی (a,b) که شامل هیچ نقطه ای از قلمرو نیستند) مناسب نیست.

اگر حد موجود باشد، منحصر بفرد است. برای تابع یک متغیره f، وجود $\lim_{x\to a} f(x)$ ایجاب می کند که وقتی x از راست یا چپ به a نزدیک می شود، $f(x)$ به عدد مشخص یکسانی نزدیک گردد.

به همین نحو، در یک تابع دو متغیره، $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ نقط وقتی وجود دارد که $f(x,y)$، صرفنظر از نحوه نزدیکی (x,y) به (a,b) در قلمرو f، به عدد یکسان L نزدیک گردد.

به خصوص، (x,y) می تواند در امتداد هر منحنی واقع در D به (a,b) نزدیک شود.

قضیه. هرگاه $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$ و هر همسایگی (a,b) شامل نقاطی از $D_f \cap D_g$ غیر از (a,b) باشد آنگاه

(i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L_1 \pm L_2$

(ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\, g(x,y) = L_1 L_2$

(iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ whenever $L_2 \neq 0$.

هرگاه $F(t)$ در $t=L$ پیوسته باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F(L)$$

با توجه به تعریف حد مستقیماً می‌توان ثابت کرد

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k.$$

با اعمال قضیه فوق بر توابع و حدود در رابطه بالا، این نتیجه مفید بدست می‌آید که حدود چندجمله‌ای و توابع گویا مانند

$$x^2+y^2, \quad \frac{xy-x+3}{x^2y-5xy^3+x^2y^2}$$

وقتی $(x,y)\to(a,b)$ را می‌توان با محاسبه توابع در (a,b) حساب کرد. تنها شرط این است که توابع باید در آن تعریف شده باشند. به عبارت دیگر چندجمله‌ای‌ها و توابع گویای دو متغیره هرجا تعریف شده باشند پیوسته‌اند.

به طور کلی هرگاه $f(x,y)$ و $g(x,y)$ هر دو در یک نقطه پیوسته باشند آنگاه مجموع، تفاضل، حاصلضرب آنها در آن نقطه پیوسته است.

مثال.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \dfrac{0-0+3}{0+0-1} = -3$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{3},2)} y\sin\left(\frac{x}{y}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$

مثال. رفتار حدی $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ را وقتی (x,y) به $(0,0)$ نزدیک می‌شود بررسی کنید.

با توجه به ضابطه f، می‌توان گفت $f(x,y)$ در جمیع نقاط صفحه xy جز مبدأ تعریف شده است.

اگر (x,y) در امتداد محور xها ($y=0$) به $(0,0)$ نزدیک شود، $f(x,y)=f(x,0)\to 0$ (زیرا $f(x,0)=0$)

لذا $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ در صورت وجود باید صفر باشد. به همین نحو در تمام نقاط محور y

داریم $f(x,y)=f(0,y)=0$. اما f در نقاط خط $x=y$ مقدار ثابت متفاوتی دارد $f(x,x)=1$.

چون حد $f(x,y)$ وقتی (x,y) در امتداد این خط به $(0,0)$ نزدیک می‌شود نمی‌تواند برابر صفر باشد

لذا $f(x,y)$ نمی‌تواند در مبدأ حد منحصر بفرد داشته باشد یعنی $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ وجود ندارد.

همچنین $f(x,y)$ بر هر شعاع از مبدأ مقدار ثابت دارد یعنی

$$y=kx \Rightarrow f(x,y)=\frac{2k}{1+k^2}$$

ولی این مقادیر روی شعاع‌های مختلف متفاوت‌اند.

مثال. تابع $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در مبدأ حد ندارد.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ (در امتداد محور xها)

$\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ (در امتداد محور yها)

این دو حد نابرابرند، حد تابع $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ وجود نخواهد داشت.

مثال . رفتار حدی $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ را وقتی (x,y) به $(0,0)$ نزدیک می‌شود بررسی کنید.

نخست در امتداد محورهای مختصات بررسی می‌کنیم

$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$ (در امتداد محور xها)

$\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$ (در امتداد محور yها)

لذا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ در صورت وجود باید صفر باشد. اگر $f(x,y)$ را در نقاط شعاع $y=mx$ امتحان کنیم، خواهیم داشت

$$f(x,mx)=\frac{m^2x^3}{x^4+m^2x^2}=\frac{mx}{x^2+m^2}\to 0,\ (m\neq 0) \text{ as } x\to 0$$

این امر که حد در امتداد تمام مسیرهای خطی به $(0,0)$ موجود بوده و مساوی صفر است ممکن است این ظن را به وجود آورد که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود دارد ولی این امر درست نیست. رفتار $f(x,y)$ را در امتداد سهمی $y=x^2$ ملاحظه می‌کنیم

$$f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

لذا وقتی (x,y) در امتداد این سهمی به مبدأ نزدیک می‌شود، $f(x,y)$ به صفر نزدیک نمی‌گردد. در نتیجه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال . نشان دهید که تابع $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ در مبدأ حد دارد. به طور مشخص،

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

این تابع همه جا جز مبدأ تعریف شده است. از طرفی با توجه به نابرابری $x^2\leq x^2+y^2$ می‌توان نوشت

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\leq |y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

وقتی که $(x,y)\to(0,0)$، به صفر نزدیک می‌شود.

$$\varepsilon>0,\ \delta=\varepsilon,\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon.$$

مانند تابع یک متغیره، پیوستگی تابع f در یک نقطه عین از قلمرویش مستقیماً برحسب حد تعریف میشود.

تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) پیوسته است اگر

(i) $f(x,y)$ در نقطه (a,b) تعریف شده باشد، (ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، خارج قسمت و ترکیب توابع پیوسته نیز پیوسته اند. توابع مثال هایی هستند که هرجا تعریف شده باشند یعنی در تمام نقاط جز مبدأ، پیوسته اند. راهی برای تعریف $f(0,0)$ نیست که این توابع در مبدأ پیوسته شوند. اینها نشان میدهند که پیوستگی توابع یک متغیره $f(x,b)$ در $x=a$، $f(a,y)$ در $y=b$، پیوستگی $f(x,y)$ در (a,b) را ایجاب نمی کنند. درواقع اگر $f(x,y)$ در امتداد هر خط مستقیم گذرا بر (a,b) پیوسته باشد ممکن است در (a,b) پیوسته نباشد.

مثال. چطوری توان تابع

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

را در مبدأ تعریف کرد که در جمیع نقاط صفحی xy پیوسته شود.

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} = 1 - \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$$

But

$$\left|\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right||xy^3| \leq |xy^3| \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad (x,y)\to(0,0)$$

Thus

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1-0 = 1$$

لذا کافیست $f(0,0)=1$ تعریف نمائیم.

قضیه. هرگاه $F(t)$ در $t=L$ پیوسته، $f(x,y)$ در (a,b) دارای حد L باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F(L)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right) = F(L)$$

مثال. چه شرطی باید بر اعداد صحیح نامنفی n, m و p اعمال کرد تا وجود $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^m y^n/(x^2+y^2)^p$ تضمین شود.

با توجه به اینکه $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ ، $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$ می‌توان نوشت

$$\left|\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p}\right| \le \frac{(x^2+y^2)^{(m+n)/2}}{(x^2+y^2)^p} = (x^2+y^2)^{-p+(m+n)/2}$$

عبارت سمت راست رابطه‌ی فوق به صفر میل می‌کند وقتی $(x,y)\to(0,0)$ مگر آنکه $-p+(m+n)/2 \le 0$ باشیم

$$-p+(m+n)/2 > 0 \Rightarrow m+n > 2p$$

در اینصورت

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p} = 0$$

مثال. آیا تابع $f(x,y) = \dfrac{\sin x \sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)}$ را می‌توان در $(0,0)$ چنان تعریف کرد که در آنجا پیوسته شود؟ اگر این کار میسر است، چگونه؟

$f(x,y)$ را می‌توان در $(0,0)$ چنان تعریف کرد که در آنجا پیوسته شود. درواقع داریم

$$f(x,0) = 0$$

لذا حد f در صورت وجود باید صفر شود، اما در امتداد خط $y=x$ داریم

$$f(x,x) = \frac{\sin^4 x}{1-\cos(2x^2)} = \frac{\sin^4 x}{2\sin^2(x^2)} \to \frac{1}{2} \text{ as } x \to 0.$$

اگر در محاسبات دکارتی نتوانیم پیشرفتی در محاسبه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ حاصل کنیم، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

قرار دهید $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ و بامیل دادن $r \to 0$ از عبارت حاصل حد بگیرید و عبارت دیگر آیا عددی چون L وجود دارد که در گزاره زیر صدق کند

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall r \; (|r| < \delta \Rightarrow |f(r,\theta) - L| < \varepsilon)$$

اگر چنین L ای موجود باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta) = L$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0$$

$\varepsilon > 0$ ، $|r| < \delta$

$|r^3\cos^3\theta - 0| = |r||\cos^3\theta| \le |r|$ ، $\delta = \varepsilon$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

تابع f کلیه مقادیر بین ۰ و ۱ صرفنظر از مقدار $|r|$ را قبول می‌کند. لذا حد فوق وجود ندارد.

گاهی اوقات تبدیل به مختصات قطبی کارساز نمی‌باشد. به طور مثال ممکن است در ابتدا در هر خط θ ثابت حد موجود باشد ولی روی مسیرهای دیگر حد موجود نباشد.

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

اگر θ را ثابت نگه داریم، $r \to 0$ آنگاه حد برابر صفر است. اما روی مسیر $y = x^2$ داریم

$$r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1$$

مشتقات جزئی

در بررسی توابع حقیقی یک متغیره دیدیم که دو انگیزه متفاوت به یکی صورت‌بندی مفهوم آهنگ تغییر آنی و دیگری یافتن مماس و تقریب خطی برای توابع غیرخطی، منجر به پیدایش مفهوم مشتق شد. در اینجا قصد داریم همین بحث‌ها را برای توابع چند متغیره مطرح کنیم. خواهیم دید که دو رهیافت ذکر شده در اینجا منجر به تعاریف متمایز ولی مرتبط بهم خواهند شد. شایسته است که بحث خود را با توجه به میزان تغییر این توابع در هر لحظه نسبت به یک متغیر شروع کنیم. و سپس تمام متغیرهای یک تابع به جز یک متغیر را ثابت نگه داریم و نسبت به این متغیر مشتق بگیریم. به گونه مشتق جزئی (یعنی) بدست آورده‌ایم. لذا یک تابع n متغیره دارای n مشتق جزئی مرتبه اول است. (نسبت به هر متغیر مستقل یک مشتق مرتبه اول داریم!)

فرض کنید $f: D(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع n متغیره باشد و $P=(P_1,\dots,P_n)$ یک نقطه‌ی درونی D باشد ($\exists r, B(r,P) \subset D$). منظور از مشتق جزئی f نسبت به متغیر x_j در نقطه $(P_1,\dots,P_n) \in D$ که با عبارت $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_1,\dots,P_n)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از حد زیر

$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(P_1,\dots,P_j+\Delta x_j,\dots,x_n) - f(P_1,\dots,P_n)}{\Delta x_j}$$

مشروط بر اینکه حد موجود و متناهی باشد و در آن به x_j نمو Δx_j داده شده و سایر متغیرها ثابت فرض شده‌اند.

مثال. تابع $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y,z) = xy^2 - z^3$ مفروض است.

(الف) مطلوبست تعیین مشتقات جزئی f در نقطه $P(1,1,0)$،

(ب) " " " f " " " $P(x,y,z)$ کلی.

(الف)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x,1,0) - f(1,1,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(1+\Delta x)^2 \cdot 1 - 0] - (1-0)}{\Delta x}$$

$$= 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1,1+\Delta y,0) - f(1,1,0)}{\Delta y} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(1,1,\Delta z) - f(1,1,0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1-\Delta z^3 - 1}{\Delta z} = 0$$

(ب)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

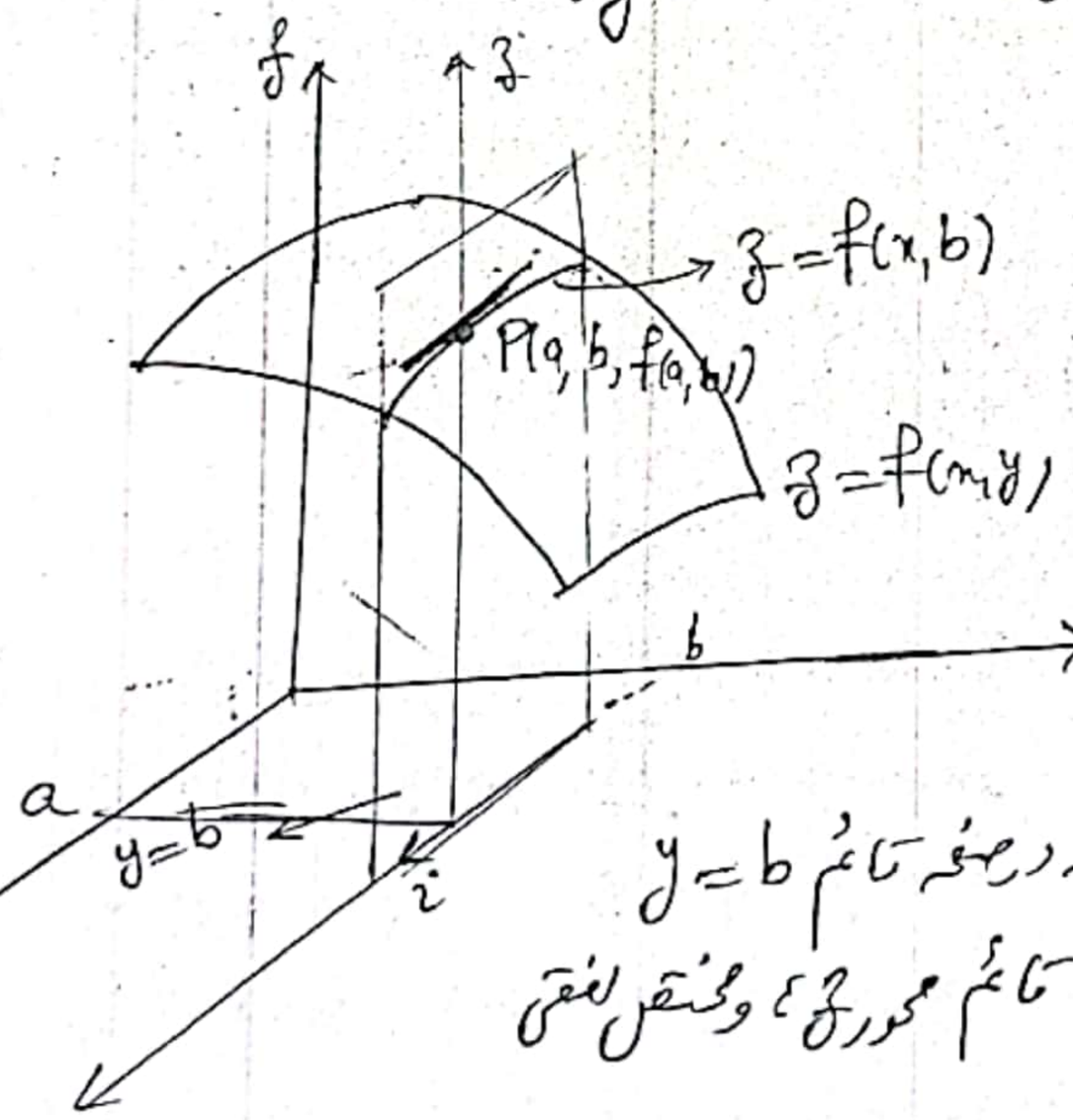
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)y^2 - z^3 - xy^2 + z^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\, y^2}{\Delta x} = y^2$$

به طور مشابه: $\frac{\partial f}{\partial y} = -3z^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$

مشتقات جزئی در توابع دو متغیره

فرض کنید (a,b) نقطه‌ای در دامنه تابع $z = f(x,y)$ باشد. اشتراک صفحه قائم $y = b$ و رویه $z = f(x,y)$ منحنی $z = f(x,b)$ است که در صفحه قائم $y = b$ قرار دارد. در این صفحه مختصات قائم محور zها و مختصات افقی محور xها است.



مشتق جزئی تابع f نسبت به متغیر x در نقطه (a,b) را به شکل مشتق معمولی $f(x,b)$ نسبت به x در نقطه $x=a$ تعریف می‌کنیم.

مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (a,b) عبارت است از

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

در صورتی که حد موجود باشد.

تعبیرهای زیر برای توان در مورد مشتق جزئی نسبت به x بیان کرد

* شیب رویه $z=f(x,y)$ در نقطه $(a,b,f(a,b))$ در صفحه $y=b$
* خط مماس بر منحنی $f(x,b)$ در نقطه P
* میزان تغییرات f نسبت به x وقتی y برای مقدار ثابت b آهنگ تغییر آن در جهت $\vec{i}$ است.

به طور مشابه $\frac{\partial f}{\partial y}$ در (a,b) عبارت است از

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a)}{k}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد.

- شیب رویه $z=f(x,y)$ در نقطه $(a,b,f(a,b))$ در صفحه قائم $x=a$
- خط مماس برمنحنی $f(x,b)$ در نقطه P
- میزان تغییرات f نسبت به y وقتی x برای مقدار ثابت a است.
- آهنگ تغییر آن در جهت $\vec{j}$ است.

برای تابع مشتقات جزئی $z=f(x,y)$ به عنوان تابعی از x و y نمادهای مختلفی به کار می‌رود.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = D_x f(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = D_y f(x,y)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)\Big|_{(a,b)} = f_x(a,b) = D_x f(a,b)$$

مثال. مشتقات جزئی توابع زیر را در نقاط داده شده به دست آورید.

(i) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1, \quad (4,-5)$

(ii) $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y), \quad (0,\pi)$

(iii) $f(x,y) = \dfrac{2y}{y+\cos x}$

مثال. مقطع صفحه $x=1$ با سهمی وار $z = x^2 + y^2$ یک سهمی است. مطلوبست شیب مماس به سهمی در نقطه $(1,2,5)$.

مثال. معادله $yz - \ln z = x + y$ متغیر z را به عنوان تابعی دو متغیره از دو متغیر مستقل x, y تعریف می کند. اگر مشتق جزئی موجود باشد، مطلوبست محاسبه $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

مثال. اگر f تابعی همه جا مشتق پذیر یک متغیره باشد نشان دهید $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ در معادله دیفرانسیل جزئی

زیر صدق می کند (PDE : Partial Differential Equations)

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

مثال. مشتقات جزئی مرتبه اول توابع زیر در نقاط داده شده را بیابید.

(i) $f(x,y,z) = \ln(1+e^{xyz})$, $(2,0,-1)$

(ii) $w = x^{y \ln z}$, $(e,2,e)$

(iii) $h(\rho,\varphi,\theta) = \rho \sin\varphi \cos\theta$

تبصره. هرگاه تابع یک متغیره $f(x)$ برای مشتق $f'(a)$ در $x=a$ نابرقرار باشد f در a پیوسته است. این خاصیت در مورد مشتقات جزئی برقرار نیست حتی اگر جمیع مشتقات جزئی مرتبه اول یک تابع چند متغیره در یک نقطه موجود باشند تابع ممکن است در آن نقطه ناپیوسته باشد.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

f در $(0,0)$ پیوسته نیست (زیرا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ موجود نیست) لذا نمودار آن در این نقطه هموار نیست. اما $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$ هر دو موجودند.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=0$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر

مشتقات جزئی مرتبه 2 و بالاتر را می‌توان با گرفتن مشتق جزیی از مشتقات جزئی قبلی محاسبه نمود، بدست آوردن در صورتی که شرایط وجود مشتق برقرار باشد.

اگر $z=f(x,y)$، دو بار مشتق جزئی گیری مرتبه 2 باید محاسبه شود.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}$$

مشتقات جزئی نسبت به x و y

$$\left(f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\qquad\left(f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

مشتقات جزئی دوم مختلط نسبت به x و y

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y},\quad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

f_{xy} یعنی ابتدا نسبت به x، سپس نسبت به y مشتق می‌گیریم.

به‌عنوان مثال برای تابع $w = f(x,y,z)$ را در نظر بگیرید.

$$f_{zyyxy} = \frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$f(x,y) = x\cos y + ye^x$.مثال

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y + ye^x) = ye^x$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y + ye^x) = -\sin y + e^x$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-x\sin y + e^x) = -\sin y + e^x$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-x\sin y + e^2) = -x\cos y$$

(ii) $f(x,y,z) = e^{x-2y+3z}$

f_{yyz} , f_{yzy} , f_{zyy} ؟

قضیه (تساوی مشتقات جزئی مخلوط)

فرض کنید دو مشتق جزئی مرتبه n مخلوط تابع f مستلزم مشتق‌گیری‌های یک‌سان ولی با ترتیب مختلف باشند. هرگاه همه این مشتقات جزئی در P پیوسته، و همه مشتقات جزئی آن از مرتبه‌ی کمتر از n در همسایگی P پیوسته باشند آن‌گاه دو مشتق جزئی مخلوط در نقطه P برابرند.

حالت خاص (قضیه اویلر)

اگر $f(x,y)$ و مشتقات جزئی f_x، f_y، f_{xy}، f_{yx} در همسایگی نقطه باز شامل نقطه (a,b) تعریف شده و پیوسته باشند آن گاه

$$f_{xy}=f_{yx}$$

مثال.

$$w=xy+\frac{e^y}{y^2+1}\quad,\quad \frac{\partial w}{\partial x\partial y}=?$$

بنابراین مطلب است که ابتدا بایستی نسبت به y، سپس نسبت به x مشتق $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ بگیریم. با توجه به اینکه شرایط قضیه بالا برقرار است می‌توان ابتدا نسبت به x، سپس نسبت به y مشتق گرفت.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(y)=1$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ در نقطه $(0,0)$ در صورتی که

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

معادلات لاپلاس و موج

بسیاری از مدل‌های مهم و جالب به وسیله توابع چند متغیره که در PDE ای خاصی صدق می‌کنند، مدل سازی می‌شوند.

مثال. نشان دهید توابع $z = e^{kx}\sin(ky)$ ، $z = e^{kx}\cos(ky)$ به ازای هر عدد حقیقی k در PDE زیر در هر نقطه از صفحه xy صدق می‌کنند.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(معادله لاپلاس)}$$

تعریف. یک تابع دو متغیره که در یک ناحیه از صفحه، مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد در این ناحیه توافقی است اگر در معادله لاپلاس صدق کند.

این توابع در نظریه توابع مختلط نقش مهمی دارند و در مدل سازی کمیات فیزیکی مختلف مانند توزیع های دما حالت پایدار، شارش سیال ها و میدان های پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی به کار می روند.

توابع توافقی از هر مرتبه مشتق دارند و تحلیلی هستند، یعنی، مجموع سری های تیلور خودی باشند.

علاوه بر این، یک تابع توافقی فقط روی مرز، علمرو خود ماکزیمم و مینیمم می تواند داشته باشد.

از یک متغیر

مثال. اگر f و g توابعی دوبار مشتق پذیر باشند، نشان دهید

$$w = f(x-ct) + g(x+ct)$$

در PDE زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$ (معادله موج)

هرگاه t زمان باشد آن‌گاه $f(x-ct)$ نمایش یک موج مسافرتی با سرعت c در امتداد محور xها با تندی c است. به همین نحو $g(x+ct)$ نمایش یک موج مسافرتی به چپ با تندی c است.

جواب‌های معادله موج برخلاف جواب‌های معادله لاپلاس که باید بی‌نهایت بار مشتق پذیر باشند فقط باید آن قدر مشتق داشته باشند که در معادله دیفرانسیل صدق کنند.

مثال. نشان دهید تابع $f(x,t) = \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-v^2} dv$ (k ثابت)

در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

صدق می‌کند.

قاعده زنجیره‌ای

در توابع یک متغیره حقیقی، از قاعده زنجیره‌ای برای مشتق گیری توابع مرکب $w=f(x)$ و $x=g(t)$ که w تابعی از x و x تابعی از t بود، این خاصیت سبب شد w تابعی از t گردد و قاعده زنجیره‌ای بیان می‌کرد که $\frac{dw}{dt}$ با استفاده از رابطه

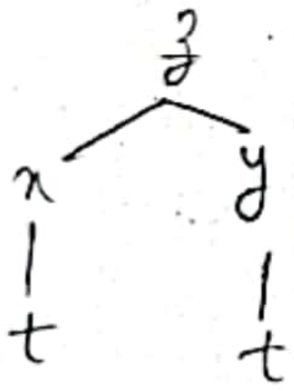
$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

قابل محاسبه است.

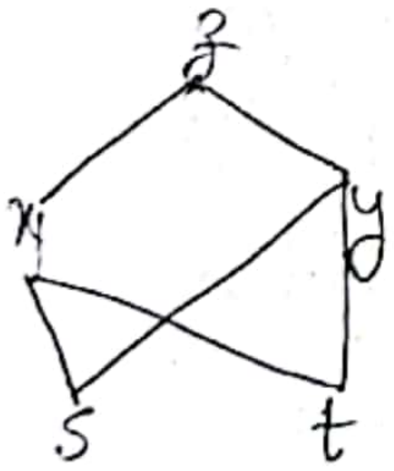
ونیز برای توابع چند متغیره دیدیم که اگر f تابع بیش از یک متغیر باشد و این متغیرها بتوانند توابعی از یک یا چند متغیر دیگر باشند، نمی‌توان انتظار فرمول ساده‌ای برای مشتقات جزئی ترکیب که هم حالات ممکن را شامل شود داشت.

در واقع، باید قاعده زنجیره‌ای را به جای یک فرمول برای مشتقات، روشی برای محاسبه مشتق گیری از ترکیبات تصور کنیم.

* فرض کنید x و y توابع مشتق پذیری از t بوده و $z=f(x,y)$. در این صورت z تابع مشتق پذیری از t است و



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$



$\therefore y=h(s,t),\ x=g(s,t)\ ,\ z=f(x,y)$ *

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,\dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,\dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

معادلات فوق را می‌توان به شکل ماتریسی زیر بازنویسی کرد،

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s},\ \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

مثال. اگر $z=\sin(x^2y)$ که در آن $x=st^2$ و $y=s^2+\frac{1}{t}$

$\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$ را

(الف) با جانشانی مستقیم و مشکل یک متغیره قاعده زنجیره‌ای،

(ب) با استفاده از قاعده زنجیره‌ای (دو متغیره) بیابید.

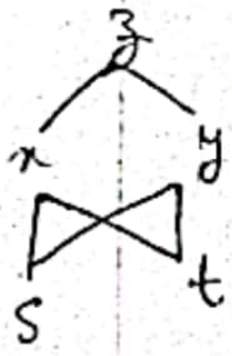
الف)

$$z=\sin(x^2y)=\sin\left((st^2)^2(s^2+\frac{1}{t})\right)$$

$$=\sin(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=(4s^3t^4+2st^3)\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=(4s^4t^3+3s^2t^2)\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$



ب)

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$ (*)

$$=(2xy\cos(x^2y))(t^2)+(x^2\cos(x^2y))(2s)$$

$$=\left[2st^2(s^2+\frac{1}{t})t^2+2s^3t^4\right]\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$=(4s^3t^4+2st^3)\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\cdots$$

مثال. فرض کنید $f(x,y,z) = (x+y)^z$ اگر $x = x(u,v) = ue^v$، $y = y(u,v) = u+v$

و $z = z(u,v) = u^v$. مطلوب است محاسبه $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ که در آن

$w = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

توابع همگن

تابع n متغیره $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ به طور مثبت همگن از درجه k است اگر برای هر نقطه $(x_1, \dots, x_n)$ در قلمرو آن و هر عدد حقیقی $t > 0$ داشته باشیم

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$$

$f(x,y) = x^4 + x^3y + y^4$ به طور مثبت همگن از درجه 4

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ " " " " " 1

$f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ " " " " " صفر

$f(x,y) = x^2 + y$ " " " " " نیست

همانطور که ملاحظه می‌شود یک تابع به طور مثبت همگن از درجه صفر در امتداد شعاع‌ها از مبدأ ثابت می‌ماند، به طور کلی، یک تابع به طور مثبت همگن از درجه k در امتداد این شعاع‌ها با توان kام فاصله تا مبدأ رشد می‌کند یا تحلیل می‌رود.

قضیه. فرض کنید هر گاه $f(x_1, \dots, x_n)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته بوده به طور همگن مثبت از درجه k باشد آن گاه

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = k f(x_1, \dots, x_n)$$

مشتقات جزئی با متغیرهای مقید

هدف کلی از محاسبه مشتقات جزئی توابعی مانند $f(x,y,z)=0$ فرض بر این است که x و y مستقل از هم هستند. اما در بسیاری از کاربردها این حالت وجود ندارد. به عنوان مثال، انرژی درونی یک گاز را می‌توان به شکل $U=f(P,V,T)$ بیان کرد که در آن P فشار، V حجم و T دما است. اما اگر مولکول‌های گاز نسبت به هم واکنش نشان دهند آن‌گاه P، V و T از قانون گازهای ایده‌آل تبعیت خواهند کرد

$$PV=nRT \quad (R,n \text{ ثابت هستند})$$

و دیگر مستقل نیستند.

نحوه محاسبه $\frac{\partial w}{\partial x}$ وقتی متغیرهای موجود در $f(x,y,z)=0$ به وسیله معادله دیگری مقید شده‌اند

1. تعیین متغیرهای مستقل و وابسته (در کاربردها این تقسیم‌بندی منوط به شرایط فیزیکی یا نظری مساله مورد نظر است)
2. حذف متغیرهای وابسته در عبارت مربوط به w
3. مشتق‌گیری مطابق معمول

مثال. مطلوبست $\frac{\partial w}{\partial x}$ در نقطه $(2,-1,1)$ هرگاه

$$w=x^2+y^2+z^2, \quad z^3-xy+yz+y^3=1$$

x و y متغیرهای مستقل هستند.

در عبارت مربوط به w، حذف z مناسب نیست. بنابراین از هر دو معادله نسبت به x به طور ضمنی مشتق می‌گیریم. x و y متغیرهای مستقل و z و w متغیرهای وابسته هستند.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (1)$$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-y+y\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=y/(y+3z^2) \qquad (2)$$

$$(1)\text{ و }(2) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}=2x+\frac{2yz}{y+3z^2}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)}=3$$

برای اینکه نشان دهیم کدام یک از متغیرها در محاسبه مشتق، مستقل فرض شده اند از علائم زیر استفاده می کنیم

$\frac{\partial w}{\partial x}$ با فرض اینکه x, y مستقل اند $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y}$

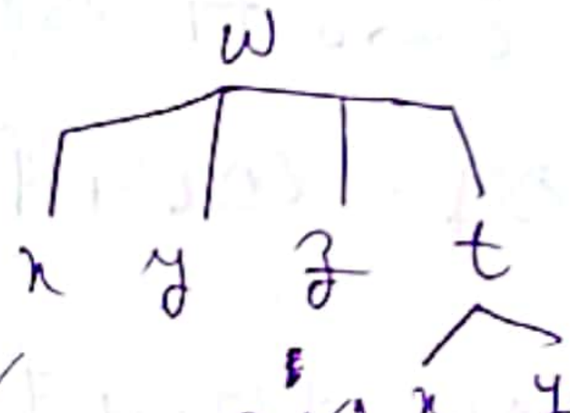
$\frac{\partial w}{\partial y}$ " " t, y, x " " $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t}$

مثال. مطلوبست محاسبه $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}$ اگر $w = x^2 + y - z + \sin t$ و $x + y = t$.

$t = x + y$ و x, y, z مستقل داریم

$w = x^2 + y - z + \sin(x+y)$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 2x + \cos(x+y)$

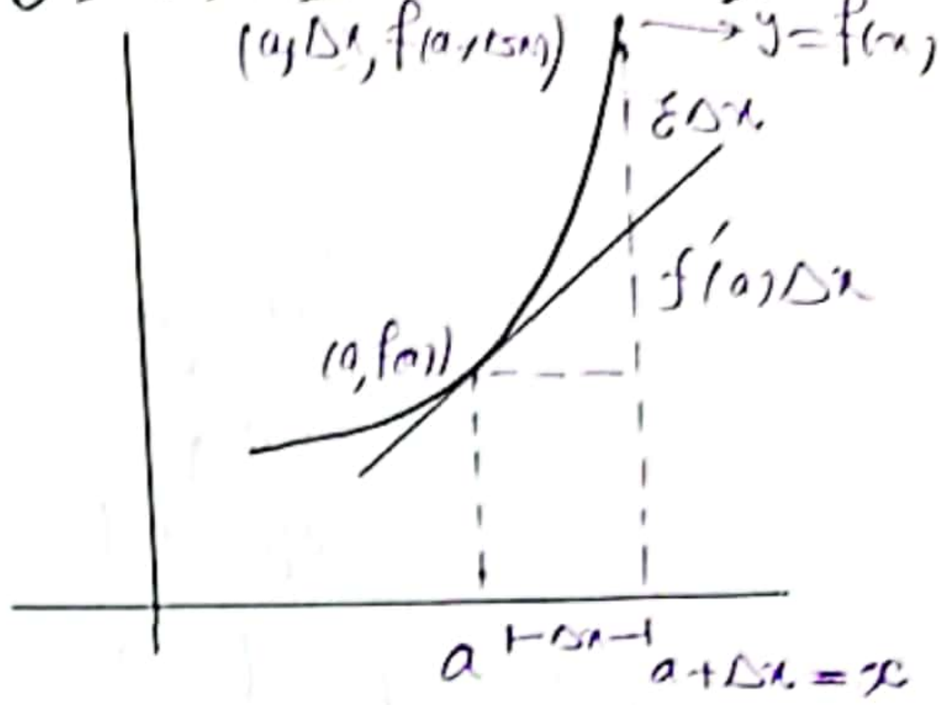


$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

مثال. برای $\frac{\partial z}{\partial x}$ که در آن z تابع u, v, r؛ u, v تابع x, y, r؛ و r تابع x, y است، قاعده زنجیره ای مناسب بیابید.

تقریبات، مشتق پذیری و دیفرانسیل ها



تابع $y=f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است هرگاه $f'(a)$ در $x=a$ موجود باشد، به عبارت دیگر

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(a)$$ موجود باشد.

قرار دهید $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

و در این صورت می توان نوشت

$$\varepsilon \to 0 \text{ iff } \Delta x \to 0$$

فرض کنید $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)$. لذا

$$\Delta y = \varepsilon \Delta x + f'(a)\Delta x.$$

از رابطه اخیر مربوط به تقریب‌ها جمله خطا $\varepsilon \Delta x$ را نظر کرده و Δy را تقریباً همه جا برابر با تقریب خطی می‌گیرند!

$$f(x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

$$f(x) \approx l(x) = f(a) + f'(a)\Delta x$$

در اینجا $l(x)$ خطی سازی f در a است. نمودارش خط مماس بر $y=f(x)$ در این نقطه است.

تنها وجود $f'(a)$ جهت تضمین کوچک بودن خطا در تقریب (فاصله قائم بین منحنی و مماس در x) و متناسب با فاصله $\Delta x = x-a$ بین a و x کافی است یعنی

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - l(a+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) = 0$$

برای توابع دو متغیره، خاصیت فاصله‌ای تعریف مشتق پذیری را بیان می‌کند. قضیه بعد مشخص می‌کند که در بعضی از این خاصیت برقرار است.

قضیه بعد برای توابع دو متغیره

فرض کنید مشتقات جزئی مرتبه اول $f(x,y)$ در سراسر همسایه باز R شامل نقطه (a,b) تعریف شده باشند و f_x و f_y در (a,b) پیوسته باشد. در این صورت تغییر

$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$$

در مقدار f که ناشی از حرکت نقطه (a,b) به نقطه $(a+\Delta x, b+\Delta y)$ در R است در معادله زیر صدق می‌کند

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \qquad (I)$$

که در آن وقتی $\Delta x, \Delta y \to 0$، $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$.

تعریف. تابع $f(x,y)$ در (a,b) مشتق پذیر است هرگاه $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$ موجود باشند و معادله (I) برای f در (a,b) برقرار باشد.

تابع f را مشتق پذیر گویند هرگاه در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق پذیر باشد.

* تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) مشتق پذیر است اگر و فقط اگر سطح $z = f(x,y)$ دارای صفحه مماس غیر قائم در (a,b) باشد. این ایجاب می‌کند که $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$ باید موجود باشند و f در (a,b) پیوسته باشد.

نتیجه. اگر مشتقات جزئی f_x، f_y تابع $f(x,y)$ در همسایگی باز R پیوسته باشند آن‌گاه f در هر نقطه R مشتق پذیر است.

در معادله (I) به جای Δz عبارت $f(x,y) - f(a,b)$ را قرار داده و معادله را باز نویسی کنید. در این صورت

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

ملاحظه می‌شود وقتی Δx، Δy به صفر میل کنند آن‌گاه عبارت سمت راست به $f(a,b)$ میل می‌کند.

لذا

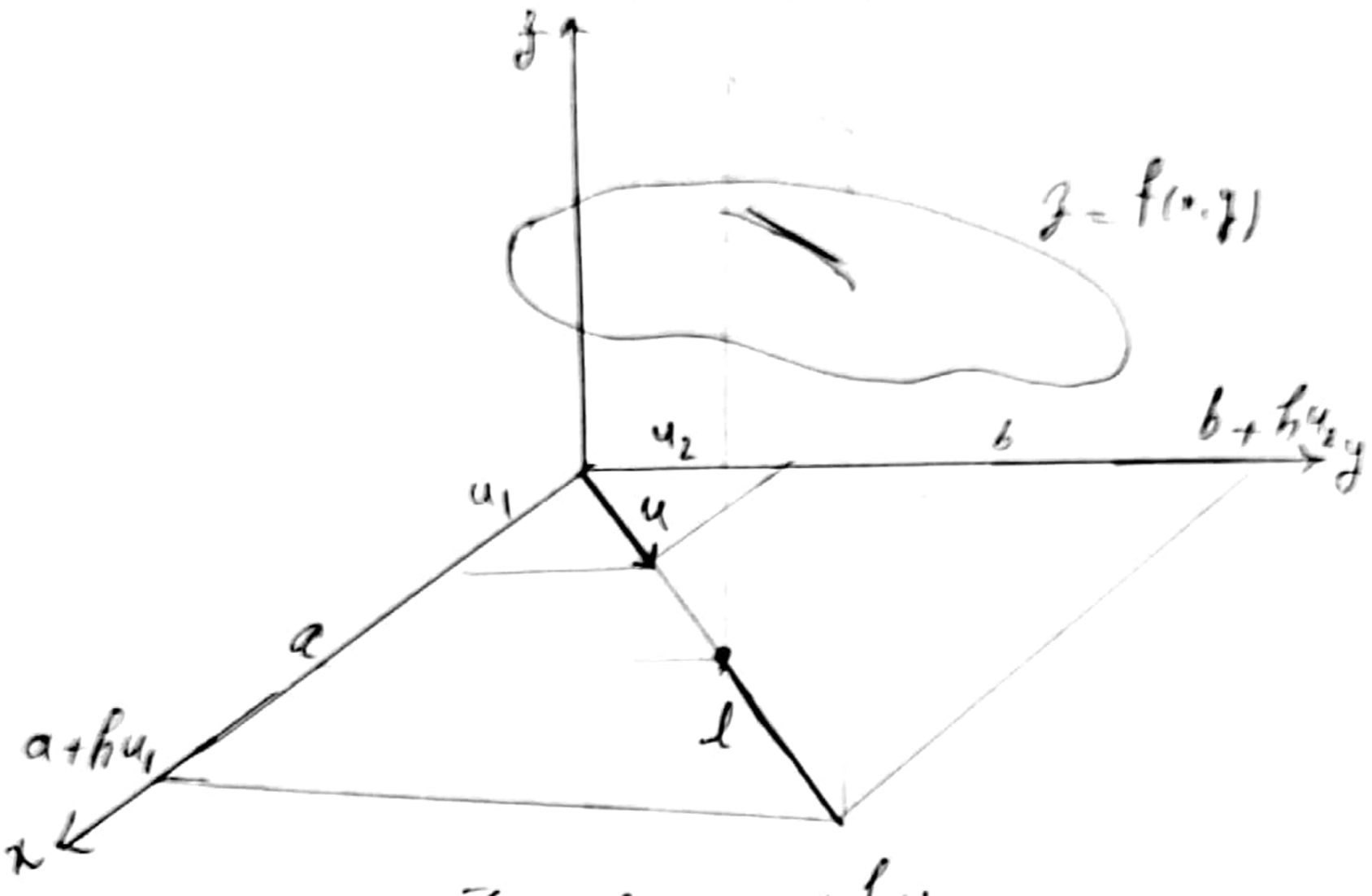
قضیه. اگر تابع f در (a,b) مشتق پذیر باشد، در (a,b) پیوسته است.

۲- بسط پذیری تیلور را برای $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ در نقطه $(2,2,0.2)$ بنویسید.

مشتق جهتی (سوئی)، بردار گرادیان و صفحه مماس

مشتقات جزئی اول یک تابع چند متغیره، میزان تغییرات تابع را نسبت به فاصله‌ای بدست می‌دهد که در جهت یکی از محورهای مختصات سنجیده می‌شود. به عنوان مثال، مشتقات جزئی اول تابع f در (a,b)، $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$، میزان تغییر تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b)، مترتب در جهت‌های مثبت محورهای x و y است.

اما اگر بخواهیم میزان تغییرات تابع f وقتی در قلمرو آن از نقطه (a,b) در جهت دیگری حرکت می‌کنیم بدانیم به تعریف کلی‌تری از مشتق نیاز داریم. مشتق جهتی، میزان تغییرات تابع f نسبت به فاصله‌ای که در هر جهت در قلمرو f سنجیده می‌شود، است.



معادلات پارامتری خط l حاوی بر $P(a,b)$ به موازات $\vec{u}$

$$\begin{cases} x = a + hu_1 \\ y = b + hu_2 \end{cases}$$

مشتق جهتی تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) در جهت بردار یکه $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ میزان تغییرات f نسبت به فاصله‌ای است که در (a,b) در امتداد یک شعاع در جهت $\vec{u}$ در صفحه xy سنجیده می‌شود.

$$D_u f\Big|_{(a,b)} = D_u f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}$$

مشروط بر اینکه حد طرف راست موجود باشد.

$$D_u f\Big|_{(a,b)} = \frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2)\Big|_{t=0}$$

مشروط بر اینکه مشتق طرف راست موجود باشد.

با توجه به تعریف مشتق جهتی، ملاحظه می‌شود مشتقات جهتی حالت خاصی از آن هستند.

$$D_i f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a)}{h}$$

$\vdots$

تعبیر هندسی. صفحه قائم گذرنده از نقاط (a,b) و $(a+hu_1, b+hu_2)$، رویه‌ی $z=f(x,y)$ را در یک خم قطع می‌کند. مشتق جهتی بیانگر شیب خط مماس بر این خم و رویه می‌باشد که در این صفحه واقع و در نقطه $(a,b,f(a,b))$ بر رویه مماس است.

مثال. مشتق جهتی تابع $f(x,y)=x^2y$ را در نقطه $(-1,-1)$ در جهت بردار یکه $u=\frac{1}{\sqrt{5}}i+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ بیابید.

مثال. فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. نشان دهید f در مبدأ در هر جهتی دارای مشتق است ولی در مبدأ پیوسته نیست.

مشتق جهتی تابع سه متغیره

مشتق جهتی تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ در نقطه (a,b,c) در جهت بردار یکه $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_u f(a,b,c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu_1,b+hu_2,c+hu_3)-f(a,b,c)}{h}$$

مشروط بر اینکه حد سمت راست موجود باشد.

بردار گرادیان

بردار گرادیان یا مشتقات جزئی اول یک تابع را به یک تابع برداری تبدیل می‌کند.

بردار گرادیان تابع $f(x,y)$ در هر نقطه (x,y) که مشتقات جزئی اول تابع $f(x,y)$ وجود دارند را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{grad } f(x,y)=\vec{\nabla}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

در یک نقطه خاص داریم

$$\nabla f\Big|_{P_0(a,b)}=f_x(a,b)\vec{i}+f_y(a,b)\vec{j}$$

نکته. عملگر ∇ یک عملگر دیفرانسیل برداری است.

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$$

$f(x,y)=\ln(xy^2)$, $P_0(1,1)$

$\vec{\nabla}f=\frac{1}{x}\vec{i}+\frac{2}{y}\vec{j}$, $\nabla f|_{(1,1)}=\vec{i}+2\vec{j}$

بردار گرادیان تابع سه متغیره f در هر نقطه (x,y,z) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{grad } f(x,y,z)=\vec{\nabla}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

رابطه بین مشتق جهتی و بردار گرادیان تابع

$$D_u f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)} \frac{dy}{dt}$$

$$= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)}$$

$$= \left(f_x(a,b)\,\vec{i} + f_y(a,b)\,\vec{j}\right) \cdot \left(u_1\vec{i} + u_2\vec{j}\right)$$

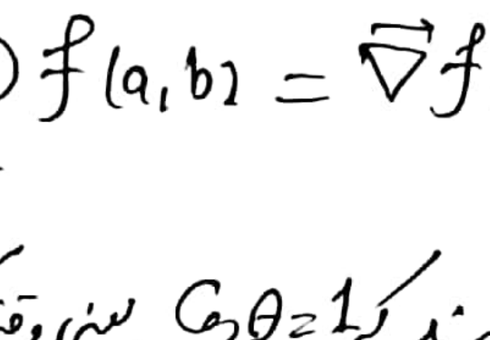
$$= \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{u}$$

به طور مشابه

$$D_u f(a,b,c) = \vec{\nabla} f(a,b,c) \cdot \vec{u}$$

مثال. مطلوبست مشتق تابع $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ در نقطه $P_0(1,1,0)$ در راستای بردار $A = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

تبصره 1. یک بردار در صفحه را می توان با زاویه قطبی مشخص کرد. جهتی که با جهت مثبت محور xها زاویه φ می سازد نظیر بردار یکه زیر است



$$\vec{u}_\varphi = (\cos\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi)\vec{j}$$

$$D_\varphi f(x,y) = D_{u_\varphi} f(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{u}_\varphi$$

$$= f_x(x,y)\cos\varphi + f_y(x,y)\sin\varphi$$

تبصره 2. به ازای هر بردار یکه u می توان نوشت

$$D_u f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{u} = |\vec{\nabla} f(a,b)| \cos\theta, \quad \theta = \angle(u, \vec{\nabla} f(a,b))$$

لذا

(1) مشتق جهتی بیشترین مقدارش را وقتی اختیار می کند که $\cos\theta = 1$ یعنی وقتی که u در جهت گرادیان باشد. به عبارت دیگر، f در راستای بیشترین افزایش را در جهت $\vec{\nabla} f$ دارد و مشتق در این جهت مساوی $|\vec{\nabla} f(a,b)|$ است.

(2) به طور مشابه، f در راستای بیشترین کاهش را در جهت $-\vec{\nabla} f$ دارد و میزان این کاهش مساوی $|\vec{\nabla} f(a,b)|$ است.

(3)

$$D_{-u} f = \vec{\nabla} f \cdot (-\vec{u}) = -(\vec{\nabla} f \cdot \vec{u}) = -D_u f$$

(4) هر جهتی مانند $\vec{u}$ که بر بردار گرادیان عمود باشد، میزان تغییرات f در آن جهت برابر صفر است.

مثال. تابع $f(x,y,z)=\frac{z^2}{xy}$ و نقطه $P(1,-1,2)$ مفروض‌اند. (الف) اگر از P به سمت مبدأ حرکت کنیم مقدار تابع با چه سرعتی تغییر می‌کند. (ب) اگر از این نقطه در خلاف جهت مبدأ حرکت کنیم، سرعت تغییر تابع را مشخص کنید. (پ) جهتی را تعیین کنید که با حرکت از نقطه P مقدار تابع با بیشترین سرعت شروع به افزایش کند. (ت) جهتی را تعیین کنید که با آن تغییرات تابع با بیشترین کاهش باشد.

مثال. فرض کنید $f(x,y)=xy$ و $P_0(2,0)$. درباره بهتی مشتق تابع f در نقطه P_0 برابر -1 است. آیا بهتی وجود دارد که مقدار فوق برابر -3 شود.

معادله صفحه مماس و خط قائم

اگر $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + l(t)\vec{k}$ یک منحنی هموار روی سطح تراز $f(x,y,z) = c$ باشد و f تابعی مشتق پذیر باشد آن گاه

$$f(g(t), h(t), l(t)) = c$$

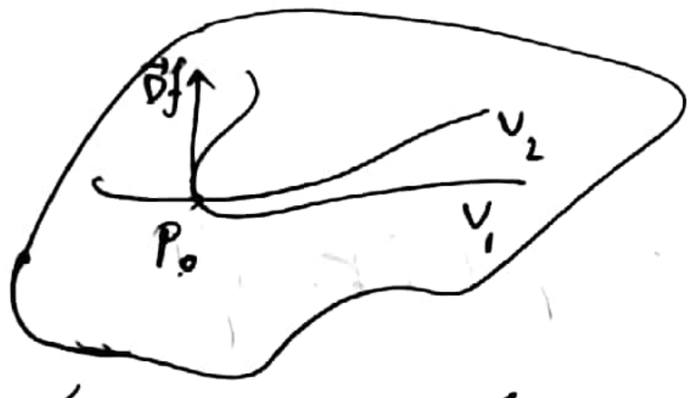
نسبت به t مشتق

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dl}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

در هر نقطه دلخواه از منحنی، $\vec{\nabla} f$ بر بردار سرعت منحنی عمود است.

منحنی‌هایی که از P_0 عبور می‌کنند در نظر بگیرید. در این صورت تمام بردارهای سرعت در P_0 به $\vec{\nabla} f$ در این نقطه عمود هستند.



لذا خطوط مماس بر منحنی‌های تراز در صفحه‌ای قرار دارند که از P_0 عبور کرده و بر $\vec{\nabla} f$ عمود است.

این صفحه را صفحه مماس بر رویه در P_0 و خطی که از P_0 عبور کرده و عمود بر صفحه مماس باشد را خط قائم بر رویه در P_0 می‌نامیم.

تعریف. صفحه مماس در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ بر رویه تراز $f(x,y,z) = c$ صفحه‌ای است که از P_0 عبور کرده و بر $\vec{\nabla} f$ عمود است.

خط قائم رویه در P_0 خطی است که بر P_0 و موازی $\vec{\nabla} f|_{P_0}$.

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t f_x(P_0) \\ y = y_0 + t f_y(P_0) \\ z = z_0 + t f_z(P_0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x(x,y)+F_y(x,y)\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \\ F(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \Longleftarrow \begin{array}{l} \text{بشرط} \\ \text{وجود} \end{array} \left\{\begin{array}{l} F_x(x,y,z)+F_z(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ F_y(x,y,z)+F_z(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{array}\right.$$

$z=f(x,y)$ حيث $F(x,y,z)=0$

$y=f(x)$ حيث $F(x,y)=0$

مثال: أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كان $x^3+y^3=3axy$

الحل: نفرض أن $F(x,y)=x^3+y^3-3axy$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

مثال: أوجد $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ إذا كان $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$

الحل: نفرض أن $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz-1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{3y^2-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz-y^2}{z^2-xy}$$

مثال: أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كان $x+y+z=5$ و $x^2+y^2-z^2=1$ عند النقطة $P(1,2,2)$ على المنحنى الناتج من تقاطع السطحين.

فرمول تیلور

فرض کنید $f(x,y)$ در همه نقاط یک مجموعه باز شامل پاره خط واصل بین نقاط (a,b) و $(a+h, b+k)$ در همسایگی آن، دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه $n+1$ باشد. همچنین فرض کنید

$$F(t) = f(a+th, b+tk), \quad 0 \le t \le 1$$

در این صورت، با توجه به فرمول تیلور توابع یک متغیره داریم

$$F(1) = f(a+h, b+k), \quad F(0) = f(a,b)$$

$$F'(t) = h f_x(a+th, b+tk) + k f_y(a+th, b+tk)$$

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + hk f_{xy} + kh f_{yx} + k^2 f_{yy}$$

$$= h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}$$

$$F'''(t) = h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy}$$

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f \Big|_{(a+th, b+tk)}$$

$$\vdots$$

$$F(1) = f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f\Big|_{(a,b)}$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a,b)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(z_1, z_2)}$$

که در آن (z_1, z_2) روی پاره خط واصل بین (a,b) و $(a+h, b+k)$ قرار دارد.

47

اگر $(a,b)=(0,0)$ و h,k را به عنوان متغیرهای مستقل در نظر بگیریم آنگاه می‌توان نوشت

$$f(x,y)=f(0,0)+(xf_x+yf_y)+\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f+\dots$$
$$+\frac{1}{n!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^n f+\frac{1}{(n+1)!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f\Big|_{(\xi_1,\xi_2)}$$

که در آن (ξ_1,ξ_2) روی پاره خط واصل مبدأ و نقطه (x,y) قرار دارد.

مثال. فرم دیفرانسیلی برای تابع $f(x,y)=\sin x \sin y$ نزدیک مبدأ بیابید. اگر $|x|\le 0.1$ و $|y|\le 0.1$، دقت تقریب را محاسبه کنید.

کاربردهای مشتقات جزئی

یافتن اکسترمم‌های توابع چند متغیره اساس بسیاری از کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته در مسایلی هستند که سایر نظام‌ها ظاهر می‌شوند.

توابع پیوسته‌ای که در نواحی بسته کراندار در صفحه xy تعریف می‌شوند ردی از نقاط تعریفشان دارای مقادیر اکسترمم هستند. برای محاسبه مقادیر اکسترمم نسبی یک تابع یک متغیره در جستجوی نقاطی هستیم که نمودار تابع در آن نقاط دارای مماس (خط) افقی باشد. در چنین نقاطی انتظار داریم ماکزیمم یا مینیمم نسبی یا نقطه عطف موجود باشند. برای توابع دو متغیره، به دنبال نقاطی هستیم که رویه $z=f(x,y)$ در آن نقاط دارای صفحه مماس افقی باشد. بنابراین در چنین نقاطی انتظار داریم که ماکزیمم یا مینیمم نسبی یا نقطه زینی یافت شود.

تعریف.
فرض کنید تابع $f(x,y)$ روی ناحیه R شامل نقطه (a,b) تعریف شده باشد. در این صورت $f(a,b)$ ماکزیمم (مینیمم) نسبی f است اگر گوی باز به مرکز (a,b) موجود باشد به طوری که به ازای هر (x,y) از دامنه f که در این گوی قرار گرفته، داشته باشیم $f(a,b) \geq (\leq) f(x,y)$.

ماکزیمم نسبی را می‌توان قله کوه و مینیمم نسبی را ته دره برای نمودی $z=f(x,y)$ در نظر گرفت. در چنین نقاطی صفحه مماس (در صورت وجود) افقی است.

تعریف.
تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) از دامنه‌اش دارای ماکزیمم (مینیمم) مطلق است هرگاه

$$\forall (x,y) \in D_f,\ f(x,y) \leq f(a,b) \quad \left(f(x,y) \geq f(a,b)\right)$$

قضیه آزمون مشتق اول برای مقادیر اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)$

اگر $f(x,y)$ در یک نقطه درونی مانند (a,b) از دامنه تعریف تابع دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد و اگر مشتقات جزئی اول تابع در این نقطه موجود باشند آنگاه

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

صفحه مماس برروی $z = f(x,y)$ عبارت است از:

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

با جایگذاری $f_y(a,b) = f_x(a,b) = 0$ در معادله فوق داریم $z = f(a,b)$ و بنابراین این است که رویه در نقاط اکسترمم دارای صفحه مماس افقی است مشروط بر اینکه صفحه مماس در آن نقطه وجود داشته باشد.

مشابه حالت یک متغیره، قضیه فوق بیان می‌کند نقاطی که تابع $z=f(x,y)$ احتمالاً دارای مقادیر اکسترمم است عبارتند از:

1. نقاط درونی که در آن‌ها $f_x = f_y = 0$
2. " " " " " f_x یا f_y یا هر دو آن‌ها موجود نباشد.
3. نقاط مرزی دامنه f

قضیه شرایط لازم برای مقادیر اکسترمم

تابع $f(x,y)$ فقط می‌تواند در نقطه (a,b) از قلمرو خود مقدار اکسترمم مطلق داشته باشد که (a,b) یکی از صورت‌های زیر باشد

(i) یک نقطه f یعنی صادق در $\nabla f(a,b) = 0$ باشد؛

(ii) یک نقطه منفرد f یعنی نقطه‌ای که در آن ∇f وجود ندارد؛

(iii) یک نقطه مرزی قلمرو f.

تعریف. یک نقطه دره از دامنه تابع f که در آن هر دوی f_x و f_y صفر باشند یا یکی از آن‌ها صفر باشد یا هر دو موجود نباشند را نقطه بحرانی f می‌نامند.

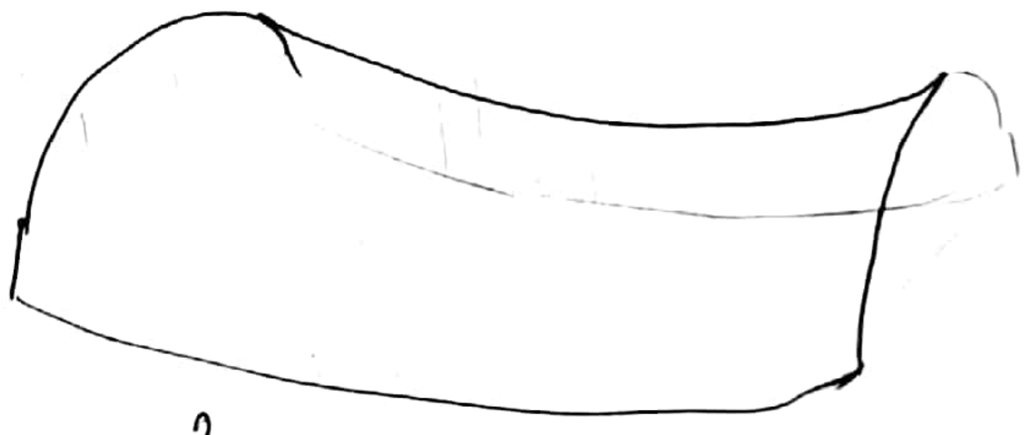
تعریف. تابع مشتق پذیر f در نقطه بحرانی (a,b) را برای نقطه زینی است اگر در هر قرص باز به مرکز (a,b) نقاطی از دامنه f باشند به طوری که در آن $f(x,y)>f(a,b)$ و نقاطی از دامنه $f(x,y)<f(a,b)$. در این صورت نقطه $(a,b,f(a,b))$ واقع بر رویه $z=f(x,y)$ را نقطه زینی رویه می‌نامند.

برای تشخیص ماکزیمم، مینیمم یا زینی بودن نقطه، Dz را تشکیل می‌دهیم.

$Dz<0$ (اگر از آن نقطه شروع بکاهش کند) $\longrightarrow$ Min

$Dz>0$ (" " " افزایش دا) $\longrightarrow$ Max

علامت Dz در همسایگی مختلف تغییر کند $\longrightarrow$ نقطه زینی



$$z = 2x - x^2 + 4y - y^2 + 5$$

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$$

49. .

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

$$g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

قضیه (آزمون مشتق دوم برای اکسترمم‌های نسبی)

فرض کنید $f(x,y)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن در سراسر یک گوی باز به مرکز (a,b) پیوسته باشند و $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. در این صورت

(i) اگر در نقطه (a,b) داشته باشیم $f_{xx} < 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ آنگاه f در (a,b) دارای ماکزیمم نسبی است.

(ii) " " " " " $f_{xx} > 0$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ " " "

" " " مینیمم " ".

(iii) " " " " " $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ آنگاه f در (a,b) نقطه زینی دارد.

(iv) " " " " " " $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$، آزمون بی نتیجه است.

$$(\text{مبین } f)\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$z = xy - x - y$$

$$z = xy\, e^{-(x^2+y^2)/2}$$

روش‌های تشخیص نقاط اکسترمم و حالت‌های مختلف توابع چند متغیره (درس ۱۲) عبارتند از:

1) استفاده از نقاط بحرانی آنها (نقاطی که در آنها مشتق‌ها یا صفر هستند یا وجود ندارند)

2) تشخیص نوع اکسترمم از روی مشتقات

3) اگر تابع در یک همسایگی از نقطه بحرانی دارای مشتقات مرتبه بالا باشد، از روی مشتقات مرتبه بالاتر نوع اکسترمم را تشخیص دهیم.

ماتریس معین (مثبت یا منفی): (Adams, p.573)

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریسی حقیقی باشد. اگر $x \in \mathbb{R}^n$ یک بردار ستونی باشد، آنگاه عبارت

$$Q(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

فرم درجه دوم متناظر با ماتریس A نامیده می‌شود.

تعریف. ماتریس A معین مثبت نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$، داشته باشیم $Q(x) > 0$. به طور مشابه A معین منفی نامیده می‌شود، اگر $Q(x) < 0$ به ازای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. A شبه معین مثبت (شبه معین منفی) نامیده می‌شود اگر به ازای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$، $Q(x) \geq 0$ ($Q(x) \leq 0$). اگر $Q(x)$ به ازای برخی بردارهای ناصفر x، مثبت و به ازای برخی دیگر، منفی باشد، آنگاه A نامعین نامیده می‌شود.

آزمون. (Adams, p.573) فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی حقیقی و متقارن از مرتبه n باشد و D_i دترمینان زیر ماتریس پیشروی اصلی A از مرتبه i باشد، یعنی

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n$$

(آ) اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $D_i > 0$، آنگاه A معین مثبت است؛

(ب) اگر به ازای اعداد زوج $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، $D_i > 0$ و به ازای اعداد فرد $i \in \{1, \ldots, n\}$، $D_i < 0$ باشند، آنگاه A معین منفی است؛

(ج) اگر $\det(A) = \det(D_n) \neq 0$ و هیچ‌یک از شرایط فوق برقرار نباشند، آنگاه A نامعین است؛

(د) اگر $\det(A) = 0$، آنگاه A معین مثبت یا منفی نیست و ممکن است شبه معین یا نامعین باشد.

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} f_x = 2xy - z = 0 \\ f_y = x^2 + 2yz = 0 \\ f_z = y^2 + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 z = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{2y^3}{z} = 0 \Rightarrow x^2 = y^3 \Rightarrow x = 1$$

$$z = -\frac{y^2}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

(הפתרון היחיד עבור $x=-1$ הוא $y=1$)

נמצא את מטריצת ההסיאן עבור $(1,1,-\frac{1}{2})$ ונקבע את סוג הקיצון:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 < 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

מכיוון שהדטרמיננטות המזרחיות מתחלפות בסימן, המטריצה H היא מטריצה לא מוגדרת.

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$$

(ב) $H(x)$ מטריצת ההסיאן של f ב-x. אם $H(x)$ חיובית לחלוטין אז x הוא מינימום מקומי של f.

(ג) $H(x)$ שלילית לחלוטין אם $-H(x)$ חיובית לחלוטין. אם $H(x)$ לא חיובית ולא שלילית לחלוטין אז x הוא נקודת אוכף של f.

(ד) $H(x)$ מטריצת ההסיאן של f ב-x. אם $H(x)$ חיובית למחצה אז x הוא מינימום מקומי של f.

(ה) $H(x)$ שלילית למחצה אם $-H(x)$ חיובית למחצה. אם $H(x)$ לא חיובית למחצה ולא שלילית למחצה אז x הוא נקודת אוכף של f.

(ו) אם $H(x)$ לא חיובית למחצה ולא שלילית למחצה אז x הוא נקודת אוכף של f.

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(מטריצת ההסיאן)

יהי f פולינום ממעלה 2 (כלומר $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ כאשר f מכילה רק איברים מהצורה $x_i x_j$ או x_i או 1). נכתוב f בצורה $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$ כאשר A היא מטריצה סימטרית, $b \in \mathbb{R}^n$ ו-$c \in \mathbb{R}$. נסמן $\nabla f = Ax + b$ ו-$H = A$.

משפט (משפט 2 בעמ' 110-111 בספר)

תהי f פונקציה גזירה פעמיים ברציפות בסביבה של $\bar{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ נקודה קריטית של f (כלומר $\nabla f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$). נסמן $H = H(\bar{\alpha})$.

(א) אם H חיובית לחלוטין אז $\bar{\alpha}$ הוא מינימום מקומי של f.

(ב) אם H שלילית לחלוטין אז $\bar{\alpha}$ הוא מקסימום מקומי של f.

(ג) אם H לא חיובית ולא שלילית לחלוטין אז $\bar{\alpha}$ הוא נקודת אוכף של f.

(ד) אם H חיובית למחצה אז $\bar{\alpha}$ הוא מינימום מקומי של f.

(ה) אם H שלילית למחצה אז $\bar{\alpha}$ הוא מקסימום מקומי של f.

(ו) אם H לא חיובית למחצה ולא שלילית למחצה אז $\bar{\alpha}$ הוא נקודת אוכף של f.

דוגמה

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - x - y$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 1 = 0 \\ f_y = -3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{אין פתרונות ממשיים}$$

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

לכן לפי משפט (1.1) f אין

قضیه (ضرایب لاگرانژ).
فرض کنید $f(x,y,z)$ در ناحیه‌ای که درون آن شامل منحنی هموار $C: \vec{r}(t)=g(t)\vec{i}+h(t)\vec{j}+l(t)\vec{k}$ است، مشتق پذیر باشد. اگر P_0 نقطه‌ای از C باشد به طوری که f نسبت به مقادیرش بر C در این نقطه دارای اکسترمم نسبی باشد آن‌گاه در P_0، بردار گرادیان ∇f بر C عمود است.

نتیجه. در نقاطی از منحنی هموار $\vec{r}(t)=g(t)\vec{i}+h(t)\vec{j}$ که تابع مشتق پذیر $f(x,y)$ نسبت به مقادیرش بر این منحنی، اکسترمم نسبی داشته باشد، داریم $\nabla f \cdot \vec{v} = 0$.

قضیه فوق، کلید روش ضرایب لاگرانژ است. فرض کنید f و g مشتق پذیرند و P_0 نقطه‌ای از رویه $g(x,y,z)=0$ باشد به طوری که f نسبت به سایر مقادیرش بر رویه در این نقطه دارای اکسترمم نسبی باشد.
بنابراین f نسبت به مقادیرش بر هر منحنی مشتق پذیری که از P_0 بر رویه $g(x,y,z)=0$ می‌گذرد در P_0 اکسترمم نسبی دارد. بنابراین ∇f به بردار سرعت این منحنی‌ها در P_0 عمود است.
اما ∇g نیز همین خاصیت را دارد (∇g به رویه تراز $g=0$ عمود است). بنابراین در P_0، بردار ∇f مضرب اسکالری چون λ از ∇g است.

روش ضرایب لاگرانژ
فرض کنید $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ توابعی مشتق پذیر باشند. برای بدست آوردن اکسترمم‌های نسبی f با توجه به قید (محدودیت) $g(x,y,z)=0$، مقادیری از x، y، z و λ را چنان بدست آورید که به طور همزمان در معادلات زیر صدق نمایند

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad , \quad g(x,y,z)=0$$

برای توابع دو متغیره، معادلات فوق به شکل زیر هستند

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad , \quad g(x,y)=0$$

مثال. نزدیکترین نقطه‌ی هذلولوی $x^2-y^2=1$ را از مبدأ بیابید.

مثال. نزدیکترین نقطه مانند $P(x,y,z)$ از صفحه $2x+y-z-5=0$ به مبدأ را بیابید.

مسأله تعیین مقدار کمینه تابعی مانند $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ محدود به قید $2x+y-z-5=0$ است. در آنجایی که هر نقطه که برای $|\overrightarrow{OP}|$ کمینه باشد برای تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ نیز کمینه است، می‌توان برای حل مسأله، مقدار کمینه تابع f را تحت قید $2x+y-z-5=0$ بدست آورد.

اگر x و y را به عنوان متغیرهای مستقل در نظر بگیریم آن گاه مسأله به یافتن نقاطی مانند (x,y) منجر می‌شود که تابع زیر در آن نقاط مقدار کمینه داشته باشد.

$$h(x,y) = f(x,y,2x+y-5) = x^2+y^2+(2x+y-5)^2$$

چون دامنه h تمام صفحه xy است، بنابراین آزمون مشتق اول در نقاطی تابع h مقدار کمینه خواهد داشت که در معادلات زیر صدق کند.

$$\begin{cases} h_x = 0 \\ h_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+4y=20 \\ 4x+4y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5/3 \\ y = 5/6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = -5/6$$

با استفاده از آزمون مشتق دوم می‌توان نشان داد که h در این نقطه کمینه است.

لذا نزدیکترین نقطه به مبدأ عبارت است از $P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$،

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{5}{\sqrt{6}} \simeq 2.04$$

$$\min\ x^2+y^2+z^2$$

$$s.t\ \ 2x+y-z-5=0$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda \\ 2y = \lambda \\ 2z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = \left(\lambda, \frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$g(x,y,z)=0 \Rightarrow 2\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3},\ P = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

مثال. نزدیکترین نقطه روی استوانه هذلولوی $x^2 - z^2 = 1$ از مبدأ را بیابید.

مثال. مطلوبست بیشترین و کمترین مقادیری که تابع $f(x,y) = xy$ روی بیضی $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ اختیار می‌کند.

اکسترمم مطلق روی نواحی بسته و کراندار

برای بدست آوردن اکسترمم مطلق تابع و پیوسته f روی ناحیه بسته و کراندار R، سه مرحله زیر را انجام می‌دهیم

(i) آن دسته از نقاط درونی R که تابع در آن‌ها اکسترمم نسبی دارد را فهرست کرده و مقدار f را در آن‌ها محاسبه می‌کنیم.

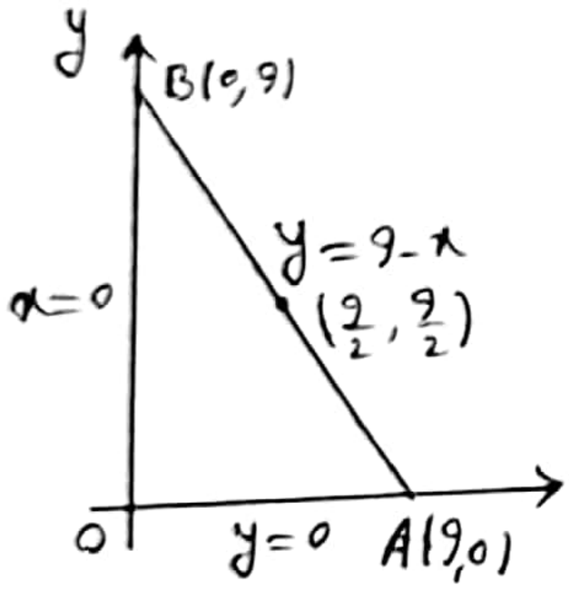
(ii) آن دسته از نقاط مرزی R که تابع در آن‌ها اکسترمم نسبی دارد را فهرست کرده و مقدار f را در آن‌ها محاسبه کنید.

(iii) فهرست‌های فوق را برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار f، بازنگری کنید.

مثال. مطلوبست اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ روی ناحیه مثلثی شکل در ربع اول که به خطوط $x=0$، $y=0$ و $y=9-x$ محصور شده است.

چون f مشتق‌پذیر است تنها نقاطی که ممکن است f در آن‌ها روی مثلث اکسترمم داشته باشد نقاطی هستند که در $f_x=f_y=0$ صدق کنند و نیز نقاط روی مرز مثلث.

نقاط درونی. به ازای این نقاط داریم $f_x=2-2x=0$، $f_y=2-2y=0$ که منجر به نقطه $(x,y)=(1,1)$ می‌گردد. مقدار f در این نقطه $f(1,1)=4$ است.



نقاط مرزی. اضلاع مثلث را در نظر می‌گیریم

1- روی ضلع OA داریم $y=0$.

تابع $f(x,y)=f(x,0)=2+2x-x^2,\ 0\le x\le 9$

را اینک می‌توان به عنوان تابعی از x روی بازه $[0,9]$ تعریف کرد. مقادیر اکسترمم آن می‌توانند یا در نقاط درونی یا در نقاط انتهایی می‌توانند موجود باشند.

$x=0 \longrightarrow f(0,0)=2$

$x=9 \longrightarrow f(9,0)=-61$

$f'(x,0)=2-2x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1,0)=3$

2- روی پاره خط OB که $x=0$ و

$f(x,y)=f(0,y)=2+2y-y^2$

$f(0,0)=2,\ f(0,9)=-61,\ f(0,1)=3$

$y = 9 - x$ بنابراین $x \in [0,9]$

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2$$
$$= -61 + 18x - 2x^2$$
$$= k(x)$$

$$k'(x) = 18 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$$

$$f(0,9) = f(9,0) = -61$$

لذا ماکزیمم f برابر 4 و مینیمم آن برابر -61 است.

مثال. دما در هر نقطه قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ مساوی $T(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$ است. دماهای ماکزیمم و مینیمم را در نقاط قرص بیابید.

ضرایب لاگرانژ با دو قید (پایش)

در بسیاری از مسایل مقادیر اکسترمم تابع مشتق پذیر $f(x,y,z)$ را تحت دو محدودیت $g_1(x,y,z)=0$ ، $g_2(x,y,z)=0$ مورد نظر است که در آن g_1 و g_2 مشتق پذیرند و $\vec{\nabla}g_1$ موازی $\vec{\nabla}g_2$ نیست. در این صورت، اکسترمم نسبی f را با روش ضرایب لاگرانژ λ و μ بدست می‌آوریم. در این روش، مقادیری از x، y، z، λ و μ را طوری می‌یابیم که به طور همزمان در معادلات زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \vec{\nabla}f = \lambda\vec{\nabla}g_1 + \mu\vec{\nabla}g_2 \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

محل تقاطع رویه‌ی $g_1=0$ و $g_2=0$ (معمولاً) یک منحنی هموار است. روی این منحنی در جستجوی نقاطی هستیم که f در آن نقاط نسبت به سایر مقادیر روی منحنی، اکسترمم نسبی دارد. در این نقاط $\vec{\nabla}f$ بر C عمود است (قضیه تعامد گرادیان) و با توجه به اینکه رویه‌های $g_1=0$ و $g_2=0$ منحنی C را شامل می‌شوند، بردارهای $\vec{\nabla}g_1$، $\vec{\nabla}g_2$ نیز بر C عمودند لذا $\vec{\nabla}f$ در صفحه‌ای که بوسیله $\vec{\nabla}g_1$ و $\vec{\nabla}g_2$ ساخته می‌شود، قرار دارد، یعنی

$$\exists \lambda,\mu,\ \vec{\nabla}f = \lambda\vec{\nabla}g_1 + \mu\vec{\nabla}g_2$$

چون نقاط مورد نظر بر هر دو رویه قرار دارند، مختصات آن‌ها باید در معادلات $g_1(x,y,z)=0$ و $g_2(x,y,z)=0$ صدق کنند.

مثال. محل تقاطع صفحه $x+y+z=1$ و استوانه $x^2+y^2=1$ یک بیضی است. مطلوبست نزدیکترین و دورترین نقاط از این بیضی تا مبدأ.

مثال. مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=xy+2z$ را روی رایره فصل مشترک $x+y+z=0$ و کره $x^2+y^2+z^2=24$ بیابید.

انتگرال های چندگانه

انتگرال های مضاعف (دوگانه)

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرایند انتگرال گیری است. یک تعبیر متداول از $\int_a^b f(x)dx$ وقتی $f(x)$ تابعی نامنفی و تعریف شده روی بازه $[a,b]$ باشد، اندازه مساحت زیر نمودار تا محور x ها بین a و b است. در اینجا می خواهیم مفهوم انتگرال توابع تعریف شده روی ناحیه های واقع در $\mathbb{R}^n$ را بررسی کنیم. یک تفاوت فوری که به ذهن می رسد تنوع شکل ناحیه ها در حالت دو بعدی و ابعاد بالاتر است. در حالت یک بعدی دامنه تعریف تابع معمولاً یک بازه یا اجتماع چند بازه در نظر گرفته می شود و این در تقریباً همه موارد کفاف نیاز می کند. در حالت دو بعدی انواع ناحیه های محصور به پاره خط یا قطعه خم را می توان تصور کرد که به طور طبیعی در مسایل گوناگون ظاهر می شوند. مثلاً ناحیه داده شده ممکن است یک صفحه ی نازک با چگالی متغیر $\rho(x,y)$ باشد. برای محاسبه جرم این صفحه باید از $\rho(x,y)$ در سراسر ناحیه، انتگرال گیری شود. برای مطرح ساختن انتگرال در دو بعد به بالا نخست مفهوم انتگرال را روی مستطیل که تعمیم طبیعی بازه است، مطرح می کنیم سپس به ناحیه های پیچیده تر می پردازیم.

فرض کنید D یک مستطیل بسته با اضلاع موازی محورهای مختصات در صفحه xy و f تابعی کراندار بر D باشد.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

(مستطیل بسته $\le$ شامل مرزش، مستطیل باز $<$)

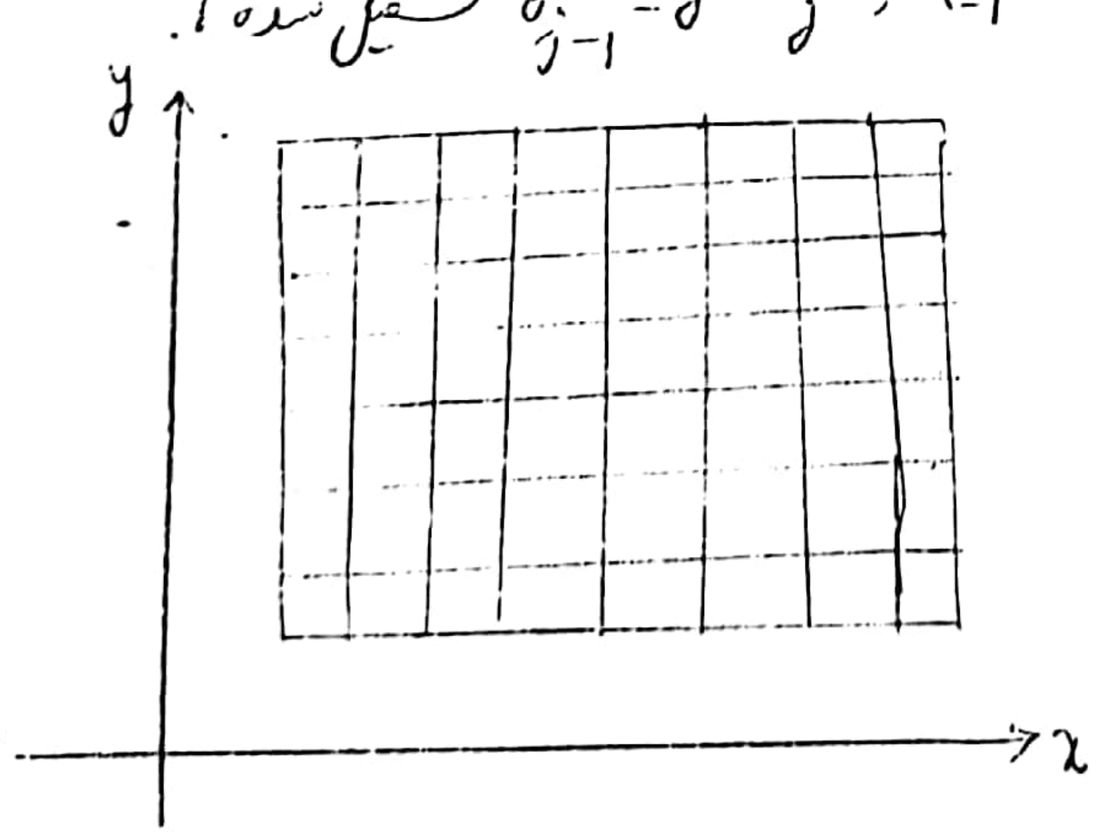
در اینصورت می توان افراز P از D را با تقسیم بازه های $[a,b]$، $[c,d]$ مثلاً با نقاط

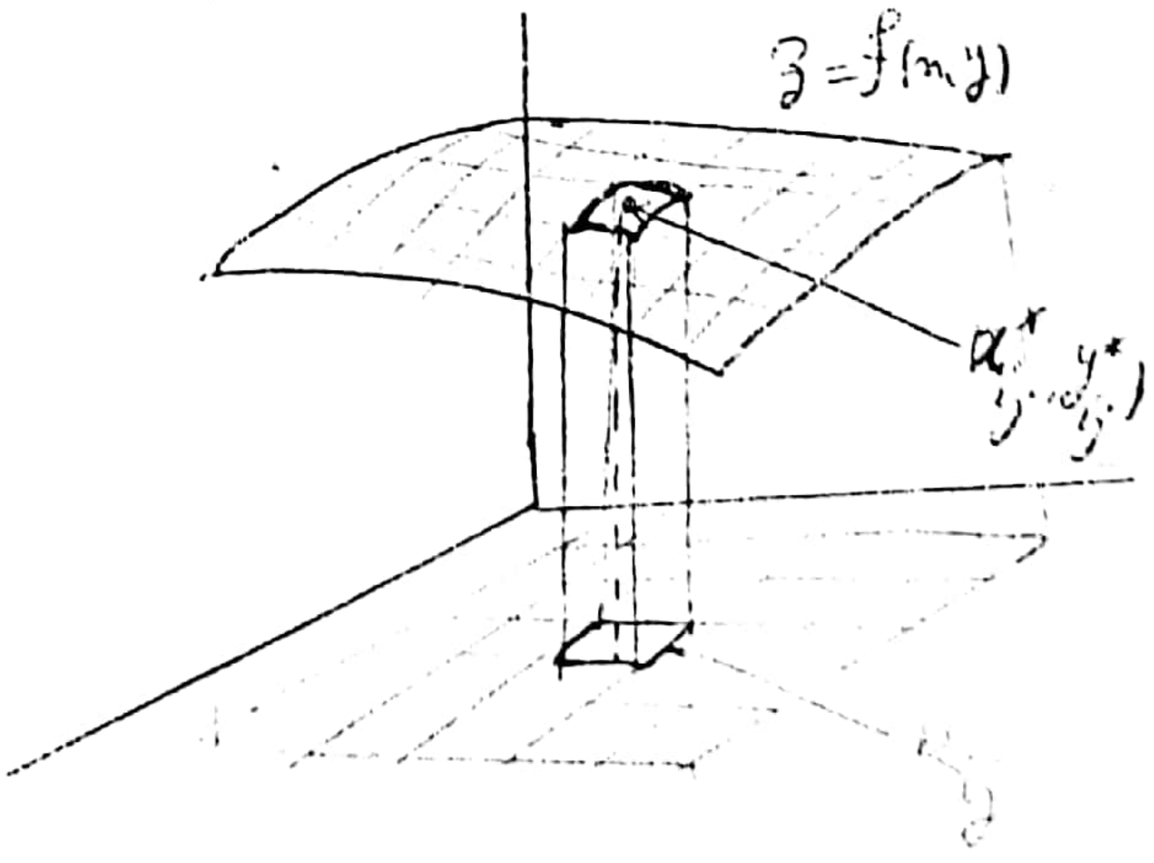
(تجزیه D به زیر مستطیل هایی از این نوع)

$$a=x_0\le x_1\le\cdots\le x_{m-1}\le x_m=b$$

$$c=y_0\le y_1\le\cdots\le y_{n-1}\le y_n=d$$

به مستطیل های کوچک تشکیل داد. بنابراین افراز P از D از mn مستطیل R_{ij}، $1\le i\le m$، $1\le j\le n$ مرکب از نقاط (x,y) که در آن $x_{i-1}\le x\le x_i$، $y_{j-1}\le y\le y_j$ تشکیل شده است.





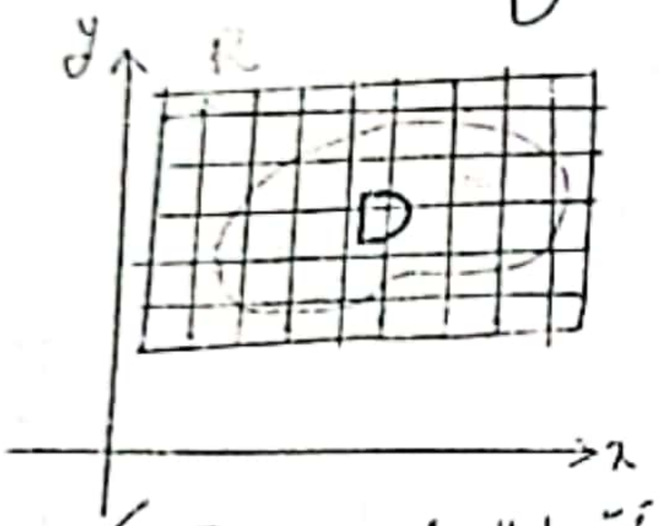
تعریف ۲. فرض کنید $f(x,y)$ بر قلمرو D تعریف شده و کراندار باشد، در اینصورت $\hat{f}$ را توسیع f گوییم هرگاه

$$\hat{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$$

هرگاه D یک قلمرو کراندار باشد آنگاه مشمول یک مستطیل مانند R است که اضلاعش موازی محورهای مختصات است. گوییم f روی D انتگرال پذیر است و انتگرال مضاعف f روی D را مساوی

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_R \hat{f}(x,y)\,dA$$

تعریف می‌کنیم مشروط بر اینکه $\hat{f}$ روی R انتگرال پذیر باشد.



با توجه به اینکه مقادیر $\hat{f}$ در بخشی از R که خارج D است همه صفرند لذا در مقدار انتگرال سهیم نیستند.

با این حال اگر f بر D پیوسته باشد، $\hat{f}$ بر R پیوسته نیست مگر وقتی (x,y) به مرز D نزدیک شود، $f(x,y)\to 0$، با این وجود اگر f بر D خوش رفتار باشد آنگاه انتگرال موجود خواهد بود.

قضیه. هرگاه f بر قلمرو بسته و کراندار D که مرزش از تعداد متناهی منحنی به طول متناهی تشکیل شده است، پیوسته باشد آنگاه f بر D انتگرال پذیر است.

خواص انتگرال دوگانه

(i) اگر D برای مساحت صفر باشد آنگاه $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$.

(ii) مساحت یک ناحیه

اگر $f(x,y)=1$، $\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D 1\,dA = D$ (مساحت ناحیه D)

(iii)

$$\iint_D k f(x,y)\,dA = k \iint_D f(x,y)\,dA$$

(iv) انتگرال دوگانه برای نمایش حجم

هرگاه بر D داشته باشیم $f(x,y) \geq 0$ آنگاه $\iint_D f(x,y)\,dA = V > 0$ که در آن V حجم جسمی است که به طور قائم بالای D و زیر سطح $z = f(x,y)$ قرار دارد.

اگر $\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \leq 0$ آنگاه $\iint_D f(x,y)\,dA = -V$

V حجم جسمی است که به طور قائم زیر D و بالای سطح $z = f(x,y)$ قرار دارد.

(v)

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA \pm \iint_D g(x,y)\,dA$$

(vi)

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \leq g(x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$$

(vii)

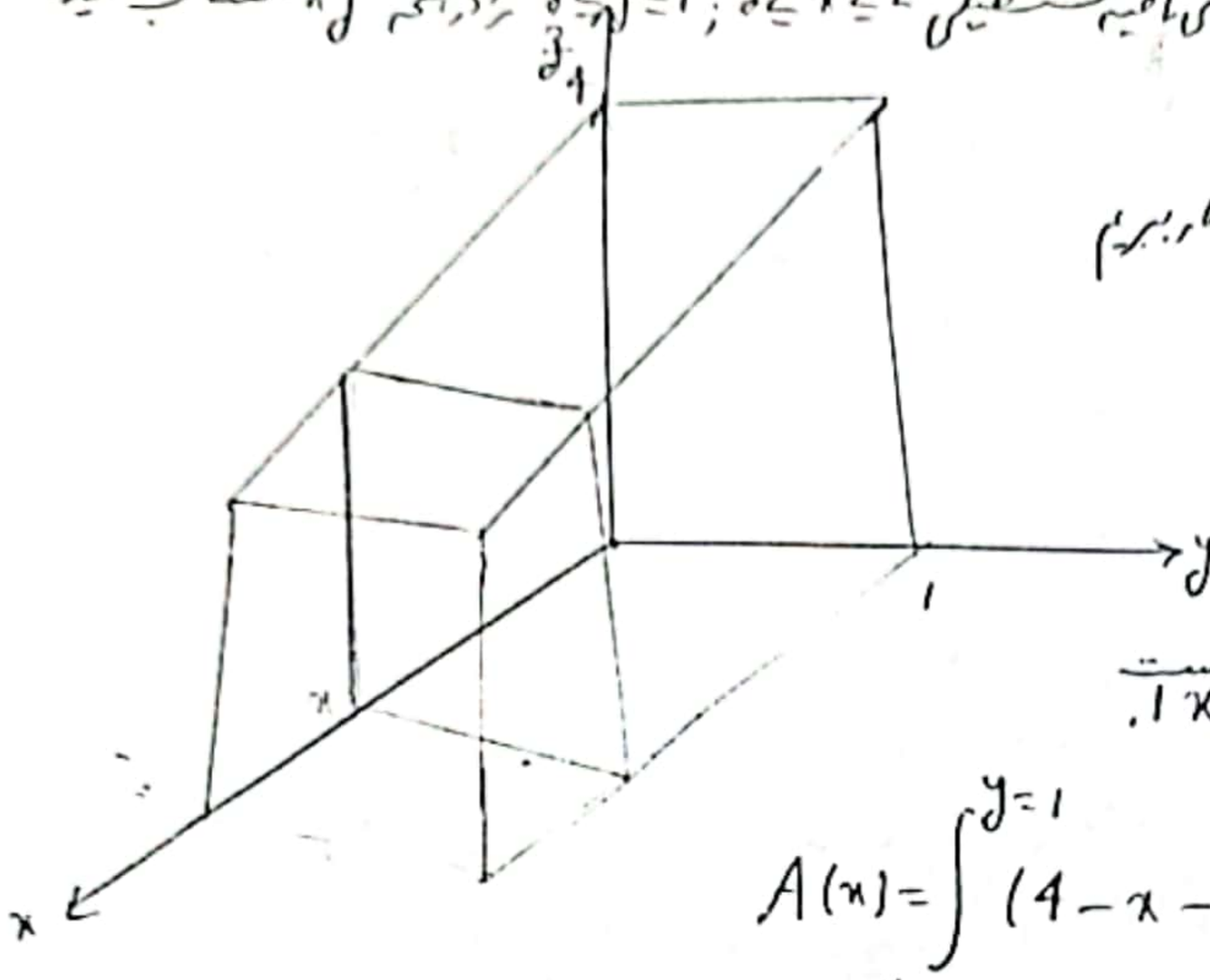
$$\forall (x,y) \in D,\ \left| \iint_D f(x,y)\,dA \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA$$

(viii) هرگاه $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ناحیه‌هایی باشند که هیچ دو تا از آنها اشتراک نداشته باشند به طوری که f روی هر یک از آنها انتگرال‌پذیر باشد آنگاه f روی اجتماع $D = D_1 \cup \ldots \cup D_k$ انتگرال‌پذیر است و

$$\iint_D f\,dA = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f\,dA$$

قضیه فوبینی برای انتگرال های مضاعف

مثال. حجم زیر سطح $z=4-x-y$ و بالای ناحیه مستطیلی $0\le x\le 2 ; 0\le y\le 1$ را در هفم xy حساب کنید.



اگر برش زدن را با برش های عمود بر محور x ها بگیریم

آنگاه حجم به صورت زیر محاسبه می شود

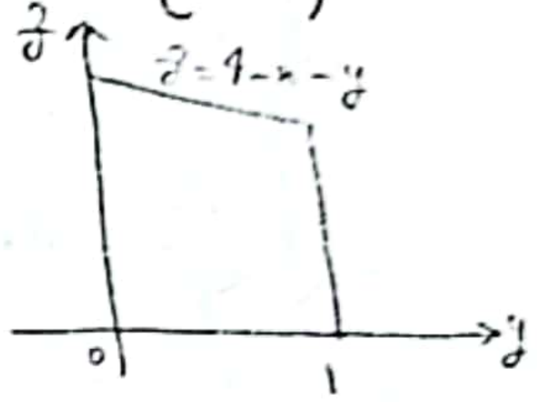
$$V=\int_{x=0}^{x=2} A(x)\,dx$$

که در آن $A(x)$ مساحت مقطع در x ثابت است.

$$A(x)=\int_{y=0}^{y=1}(4-x-z)\,dy$$

(مساحت زیر منحنی $z=4-x-y$ و بالای مقطع در x ثابت است.)

$$V=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=2}\left(4y-xy-\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=1}dx$$

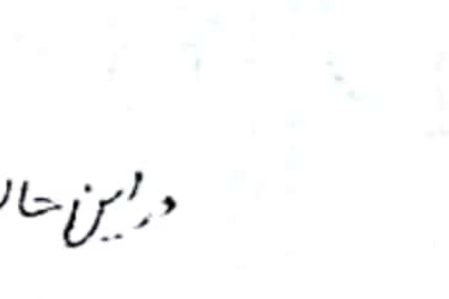


$$=\int_{x=0}^{x=2}\left(\frac{7}{2}-x\right)dx=\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}\Big]_{x=0}^{x=2}=5$$

در این حالت انتگرال مکرر را روی $V=\int_0^2\int_0^1(4-x-y)\,dy\,dx$ می توان بیانگر این است که حجم را با انتگرال گیری از $4-x-y$ نسبت به y از $y=0$ تا $y=1$ با ثابت نگه داشتن x و سپس انتگرال گیری از نتیجه ی عبارت حاصل نسبت به x از $x=0$ تا $x=1$ بدست آورد.

اگر حجم را با برش زدن صفحات عمود بر محور y ها حساب کنیم آنگاه

$$V=\int_{y=0}^{y=1}A(y)\,dy,\quad A(y)=\int_{x=0}^{x=2}(4-x-y)\,dx$$



$$V=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=2}(4-x-y)\,dx\,dy=\int_{y=0}^{y=1}(4-2y)\,dy=5$$

در این حالت انتگرال مکرر $\int_0^1\int_0^2(4-x-y)\,dx\,dy$ بیانگر این است که می توان حجم را با انتگرال گیری از $4-x-y$ نسبت به x از $x=0$ تا $x=2$ با ثابت نگه داشتن y و سپس انتگرال گیری از نتیجه ی عبارت حاصل نسبت به y از $y=0$ تا $y=1$ بدست آورد.

قضیه فوبینی

اگر $f(x,y)$ بر ناحیه مستطیلی $D=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$ پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

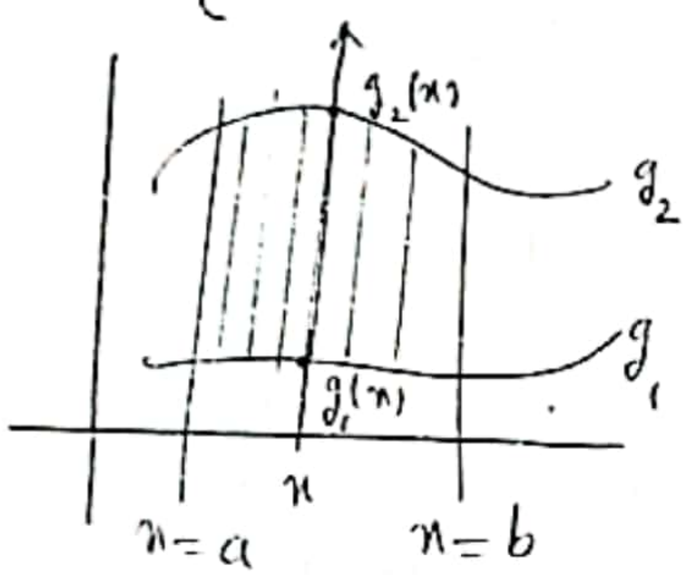
قضیه فوبینی بیان می‌کند که انتگرال دوگانه روی مستطیل را می‌توان به صورت انتگرال‌های مکرر محاسبه نمود.

قضیه فوبینی (شکل تورتیرا)

فرض کنید $f(x,y)$ روی ناحیه D پیوسته باشد که در آن

$$D=\{(x,y): a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x),\ g_1,g_2\in C[a,b]\}$$

(ناحیه ساده عمودی)



D

در اینصورت

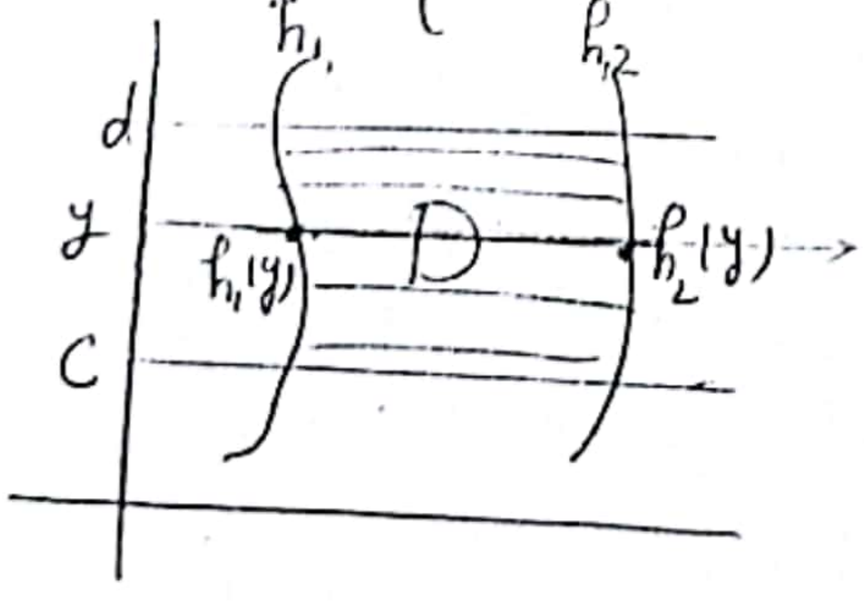
$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(بیانگر سطح زیر منحنی حاصل از برخورد رویه‌ی $z=f(x,y)$ با صفحه $x=x$ بررسی حاصله $g_1(x)\le y\le g_2(x)$ است.)

فرض کنید $f(x,y)$ روی ناحیه D پیوسته باشد که در آن

$$D=\{(x,y): c\le y\le d,\ h_1(y)\le x\le h_2(y),\ h_1,h_2\in C[c,d]\}$$

(ناحیه ساده افقی)



در اینصورت

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال های مضاعف زیر در نواحی داده شده

(a) $\iint_D (4xy - x^2)\,dA, \quad D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{x}\}$

(b) $\iint_D (x-y)^2\,dx\,dy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x-2,\ y^2 = x\}$

(c) $\iint xy\,dA, \quad D = D_1 \cup D_2$ ، $D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^3 \le y \le x \end{cases}$ ، $D_2 : \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ x \le y \le x^3 \end{cases}$

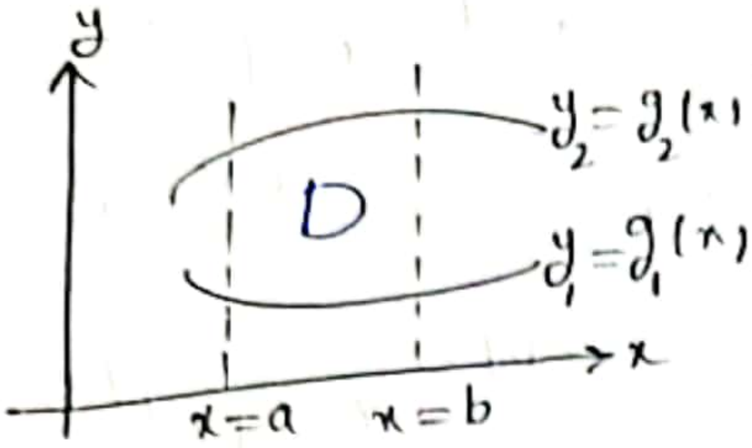
(d) $\iint |2x - y|\,dx\,dy, \quad D = [0,1]^2$

(e) $\int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} (x+y)\,dx\,dy$

(f) $\int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\,dx$

(g) $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dA,$ D مثلثی در صفحه xy که به محور x ها، خط $y = x$ و خط $x = 1$ محدود شده است

محاسبه مساحت از انتگرال های دوگانه



$$S_D = \iint_D dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx$$

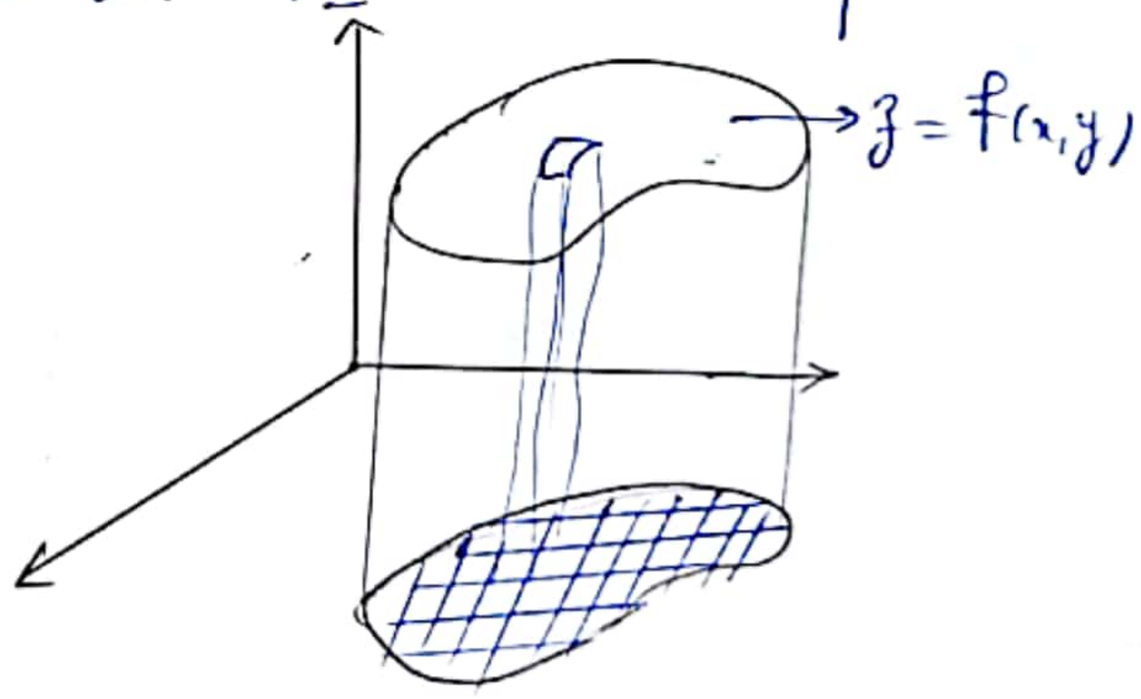
$$= \int_a^b \left[g_2(x) - g_1(x) \right] dx$$

مثال. مساحت ناحیه D محصور به سهمی $y = x^2$ و خط $y = x+2$ را بیابید.

محاسبه حجم از انتگرال مضاعف

حجم جسمی که زیر سقفی مشخص است طوری که طرفین آن نیز محدود به یک استوانه قائم باشند به صورت زیر محاسبه می شود

$$V = \iint_D z\,dA$$



مثال. هیچ‌یک از دایره‌های $x^2+y^2-4x-16=0$ و $x^2+y^2-10y+16=0$ بر هم مماس نیستند.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$ و دایره‌ی $x^2+y^2=5$ بر هم مماس‌اند.

مثال. خط $y=x+1$ بر کدام یک از دایره‌های $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ مماس است؟

$x^2+y^2=9$ و $y=x+1$ $\Rightarrow$ $x^2+(x+1)^2=9$ $\Rightarrow$ $2x^2+2x-8=0$ $\Rightarrow$ $x^2+x-4=0$

$\Delta=1+16=17>0$ پس خط $y=x+1$ دایره‌ی $x^2+y^2=9$ را در دو نقطه قطع می‌کند.

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ و $y=x+1$ $\Rightarrow$ $x^2+(x+1)^2-2x-2(x+1)+1=0$

$\Rightarrow$ $x^2+x^2+2x+1-2x-2x-2+1=0$ $\Rightarrow$ $2x^2-2x=0$ $\Rightarrow$ $x^2-x=0$

$\Delta=1>0$ پس خط $y=x+1$ دایره‌ی $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ را در دو نقطه قطع می‌کند.

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال های مضاعف

فرض کنید D مجموعه‌ای در صفحه xy باشد که بسته و کراندار و دارای مساحت مثبت $A=\iint_D dA$ است. همچنین $f(x,y)$ بر D پیوسته باشد. در اینصورت (بنا به قضیه شرط کافی مقدار اکسترمم) نقاطی مانند (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در D وجود دارند که در آنها f مقادیر مینیمم و ماکزیمم می‌گیرد. یعنی بازای جمیع مقادیر (x,y) در D خواهیم داشت

$$f(x_1,y_1)\le f(x,y)\le f(x_2,y_2)$$

با انتگرال گیری از طرفین نامساوی بالا روی ناحیه D خواهیم داشت

$$f(x_1,y_1)A\leqslant \iint_D f(x,y)\,dA\leqslant f(x_2,y_2)A$$

$$f(x_1,y_1)\leqslant \bar{f}=\frac{1}{A}\iint_D f(x,y)\,dA\leqslant f(x_2,y_2)$$

مجموعه D در صفحه همبند است اگر هر دو نقطه در آن را بتوان با یک منحنی پارامتری پیوسته مانند $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t),\ 0\le t\le 1\end{cases}$ واقع در D به هم وصل کرد.

فرض کنید این منحنی (x_1,y_1) (که $t=0$) و (x_2,y_2) (که $t=1$) را به هم وصل کرده باشد. همچنین $g(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$g(t)=f(x(t),y(t)),\quad 0\le t\le 1 \qquad (g(0)\leqslant \overset{\bar{f}}{k}\leqslant g(1))$$

در اینصورت g پیوسته است و مقادیر $f(x_1,y_1)$ و $f(x_2,y_2)$ بترتیب در $t=0$ و $t=1$ را می‌گیرد. بنا به قضیه مقدار میانی عددی مانند t_0 بین صفر و یک است که $\bar{f}=g(t_0)=f(x_0,y_0)$ که $\begin{cases}x_0=x(t_0)\\ y_0=y(t_0)\end{cases}$. لذا نقطه‌ای مانند (x_0,y_0) در D یافته‌ایم که

$$\frac{1}{\text{مساحت } D}\iint_D f\,dA=f(x_0,y_0)$$

قضیه. هرگاه f بر مجموعه بسته، کراندار و همبند D در صفحه xy پیوسته باشد آنگاه نقطه‌ای مانند (x_0,y_0) در D است به طوری که

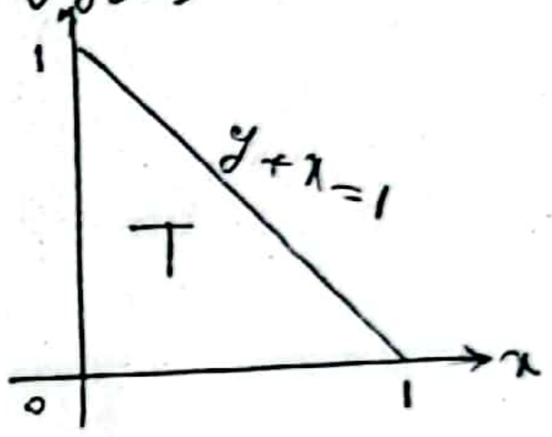
$$\iint_D f\,dA = f(x_0,y_0)\times(\text{مساحت } D)$$

تعریف. مقدار متوسط یا مقدار میانگین تابع انتگرال پذیر $f(x,y)$ روی مجموعه D مساوی عدد زیر است

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{مساحت } D}\iint_D f\,dA$$

هرگاه بر D داشته باشیم $f(x,y)\geq 0$ آنگاه استوانه با قاعده‌ی D و ارتفاع ثابت $\bar{f}$ حجمی مساوی حجم ناحیه توپر واقع بر بالای D و زیر سطح $z=f(x,y)$ دارد.

مثال. در مثلث T به رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ تعداد زیادی نقطه‌ی (x,y) را به تصادف اختیار می‌کنیم. مقدار متوسط تقریبی x^2+y^2 برای این نقاط چیست؟



$$\frac{1}{\frac{1}{2}}\iint_T (x^2+y^2)\,dA = 2\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

مثال. فرض کنید (a,b) یک نقطه‌ی درونی قلمرو D باشد که $f(x,y)$ روی آن پیوسته است. به ازای r مثبت به قدر کافی کوچک، قرص مستدیر بسته‌ی D_r به مرکز (a,b) و شعاع r جزء D است. نشان دهید

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} f(x,y)\,dA = f(a,b)$$

هرگاه D_r جزء D باشد آنگاه بنا به قضیه مقدار متوسط تابع داریم

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} f\,dA = f(x_0,y_0)$$

as $r\to 0$, then $(x_0,y_0)\longrightarrow(a,b)$

$f:(a,b)$ continuous $\Longrightarrow f(x_0,y_0)\longrightarrow f(a,b)$

Thus $\lim \frac{1}{\pi r^2}\iint f\,dA = f(a,b)$.

انتگرال‌های مضاعف در مختصات قطبی

در بسیاری از کاربردهای انتگرال مضاعف ممکن است تعیین و انتگرال‌گیری یا تابع زیر انتگرال (تابع انتگرالده) یا هر دو برحسب مختصات قطبی آسانتر از مختصات دکارتی بیان شود. به‌عنوان مثال مساله یافتن حجم ناحیه تو در واقع در بالای صفحه xy و زیر سهمی‌گون $z=1-x^2-y^2$ را در نظر بگیرید. چون سهمی‌گون صفحه‌ی xy را در دایره $x^2+y^2=1$ قطع می‌کند حجم در مختصات دکارتی عبارت است از

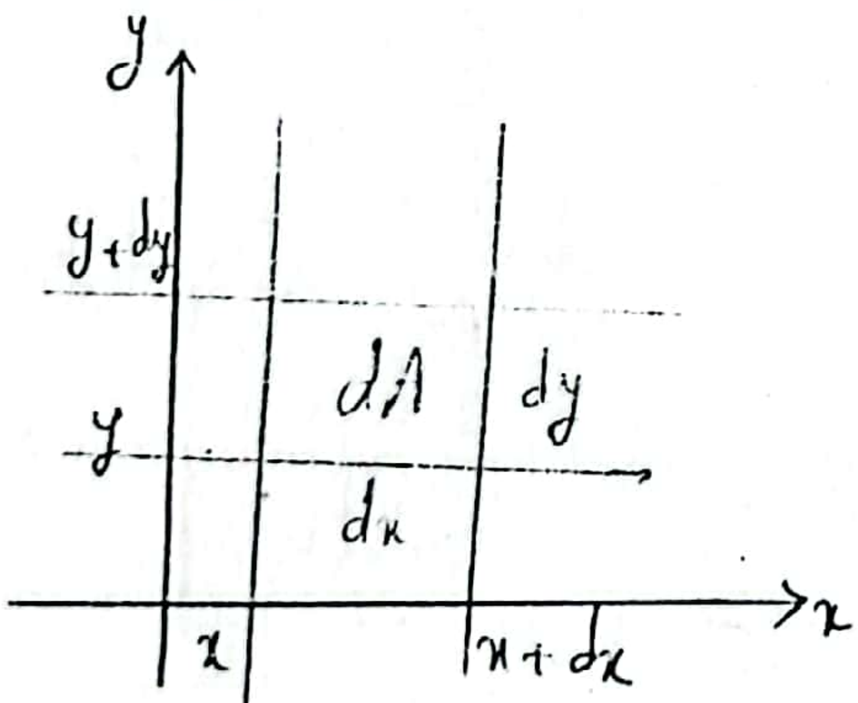
$$V=\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\,dy\,dx$$

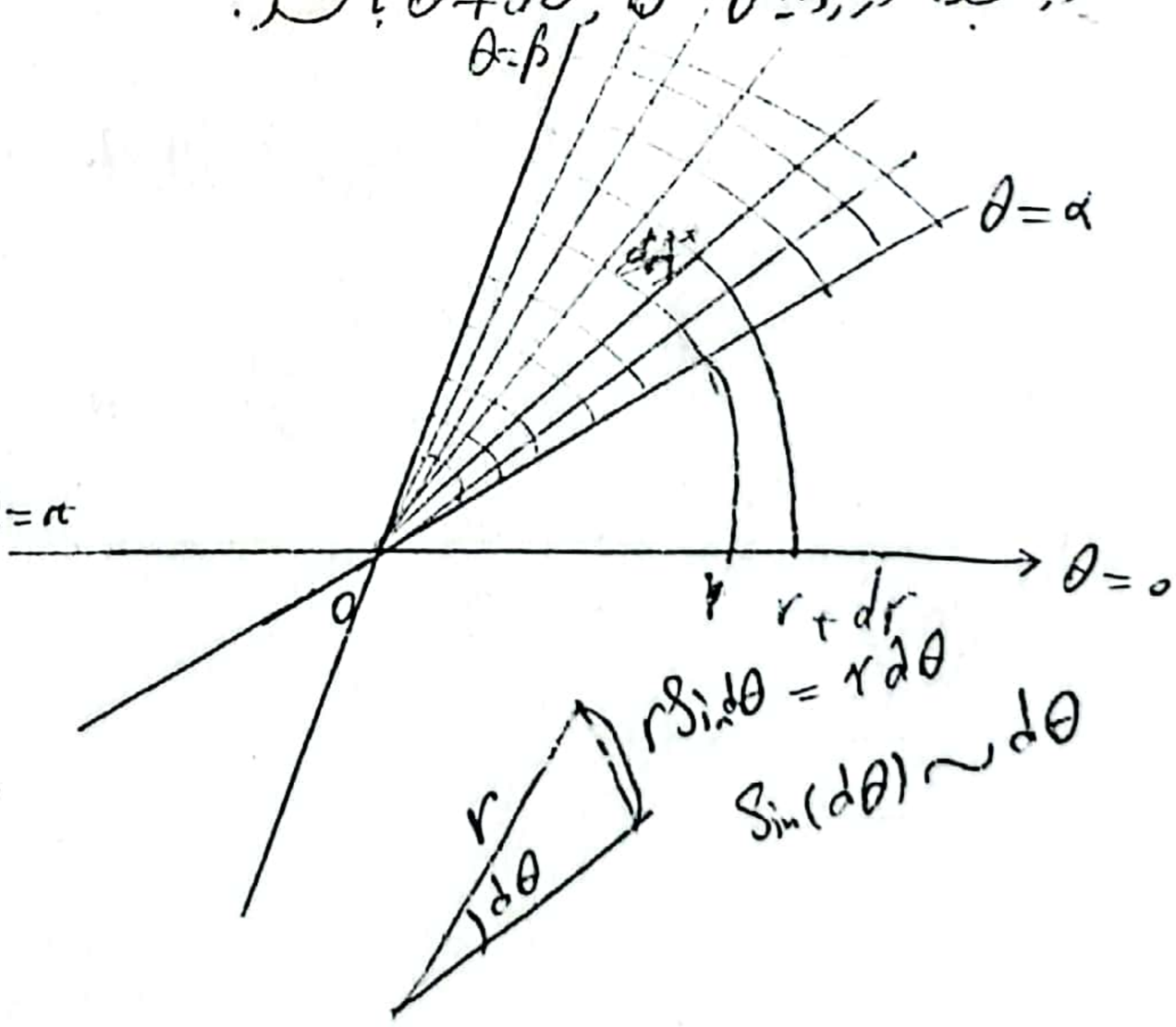
محاسبه این انتگرال مکرر نیاز به تلاش فوق‌العاده دارد. اما می‌توان همین حجم را برحسب مختصات قطبی به صورت

$$V=\iint_{r\le 1}(1-r^2)\,dA$$

بیان کرد. برای تکرار این انتگرال باید شکلی را که عنصر مساحت dA در مختصات قطبی می‌گیرد، بدانیم.

در مورد دکارت برای V، عنصر مساحت $dA=dx\,dy$ نمایش مساحت ناحیه‌ی بی‌نهایت کوچک کرانداری به خطوط مختصات در x، $x+dx$، y، $y+dy$ است. اما در مورد قطبی، عنصر مساحت dA باید نمایش مساحت ناحیه بی‌نهایت کوچک کرانداری به دوایر مختصات به شعاع‌های r، $r+dr$، شعاع‌های مختصات از مبدا در زاویه‌های θ، $\theta+d\theta$ باشد.

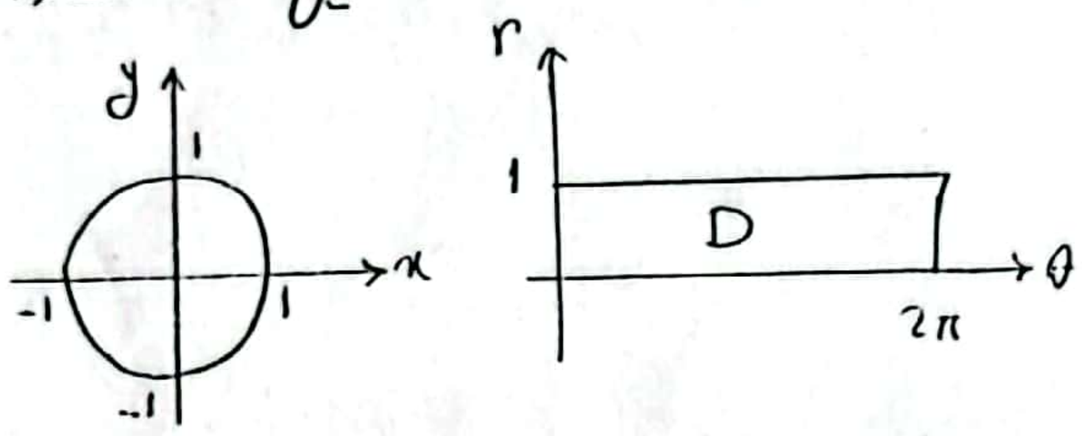




ملاحظه می‌کنیم که dA تقریباً مساحت یک مستطیل با ابعاد dr, $rd\theta$ است. خطا در این تقریب وقتی dr, $d\theta$ به صفر نزدیک می‌شوند در مقایسه با اندازه‌ی dA محسوس نیست. لذا در تبدیل یک انتگرال مضاعف بین مختصات دکارتی و قطبی، عنصر مساحت طبق فرمول زیر تبدیل می‌شود

$$dxdy = rdrd\theta$$

برای تکرار شکل قطبی انتگرال مضاعف برای V مطرح شده در بحث، می‌توان تکرار انتگرال تکراری را به صورت مجموعه‌ای در یک صفحه با مختصات دکارتی r, θ در نظر گرفت. در صفحه دکارتی xy تکرار، ناحیه R است ولی در صفحه دکارت $r\theta$ یا محورهای عمود بر هم (r, θ) تکرار مستطیل R است که با $0 \le r \le 1$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ مشخص می‌شود.



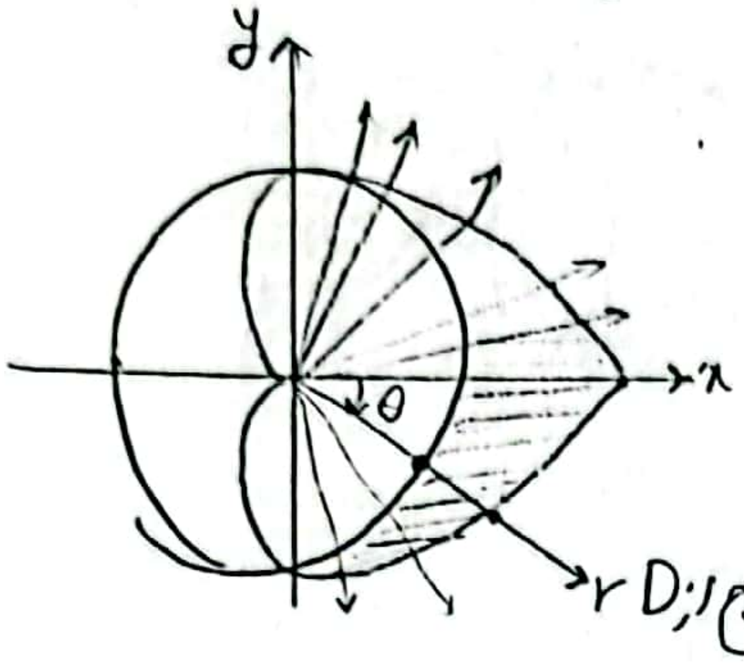
عنصر مساحت در صفحه‌ی $r\theta$ عبارت است از: $dA^* = drd\theta$. در نتیجه مساحت تحت تبدیل به مختصات قطبی حفظ نمی‌شود $(dA = rdA^*)$. لذا انتگرال قطبی برای V در واقع یک انتگرال تکراری در صفحه‌ی $r\theta$ است که انتگرال‌ده با گسترداندن عامل اضافی r برای جبران تغییر مساحت تعدیل شده است.

این انتگرال را می‌توان با روش‌های انتگرال‌گیری متعارف حساب کرد.

$$V = \iint_R (1 - r^2)\, r\, dA^* = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1 - r^2)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

مثال. حدود انتگرال گیری، انتگرال تابع $F(r,\theta)$ را روی ناحیه D واقع در داخل دکلون $r=a(1+\cos\theta)$ و خارج دایره $r=a$ بیابید.



1- رسم ناحیه انتگرال گیری

2- حدود r

θ را ثابت گرفته، با افزایش r شعاع از مبدأ رسم می‌کنیم.

از مقدار r زمان ورود شعاع به D تا مقدار r زمان خروج از D انتگرال می‌گیریم.

3- حدود θ را طوری اختیار می‌کنیم که تمام شعاع‌هایی که از مبدأ صادر شده و D را قطع کرده، شامل شود.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a}^{a(1+\cos\theta)} F(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

تبدیل انتگرال‌های دکارتی به انتگرال‌های قطبی

1- $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ را جایگزین می‌کنیم و در انتگرال دکارت به جای $dx\,dy$، $r\,dr\,d\theta$ قرار می‌دهیم.

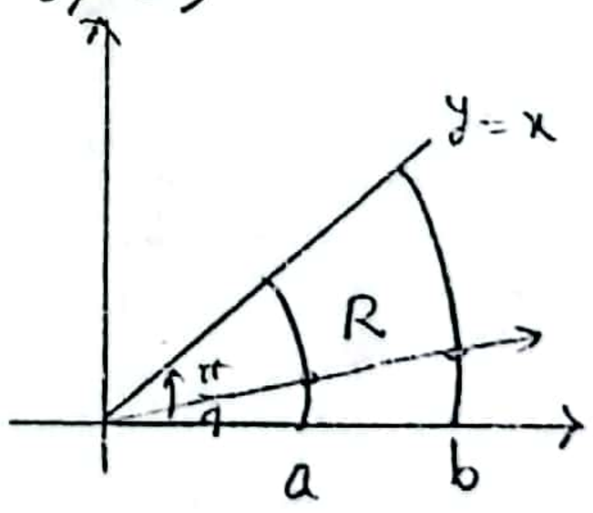
2- حدود انتگرال‌گیری قطبی را برای ناحیه D تعیین می‌کنیم.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

(ناحیه انتگرال‌گیری در مختصات قطبی)

مثال. اگر R آن قسمت از طوق $0<a^2\le x^2+y^2\le b^2$ باشد که در ربع اول و زیر خط $y=x$ قرار دارد، انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I=\iint_R \frac{y^2}{x^2}\,dA$$



$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^b r\tan^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\,r^2\Big|_a^b\,d\theta=\frac{b^2-a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\,d\theta=\frac{b^2-a^2}{2}\left[\tan\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4-\pi}{8}(b^2-a^2).$$

$$\text{مساحت بیرون گلبرگ} = \iint_D r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)^2 - a^2\right]d\theta$$

$$\text{مساحت مشترک} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r\,dr\,d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$

مثال. انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

(a) $\iint_D \sin(\pi(x^2+y^2)^2)\, dx dy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 3,\ y\ge x\}$

(b) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2x,\ x\ge 1\}$

(c) $\iint_D x\, dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\ |y|\ge|x|\}$

مثال. حجم ناحیه توپر واقع در کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و استوانه $x^2+y^2=2ay$ را بیابید.

مثال. حجم حاصل از تقاطع رویه‌های زیر را بیابید.

(a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$

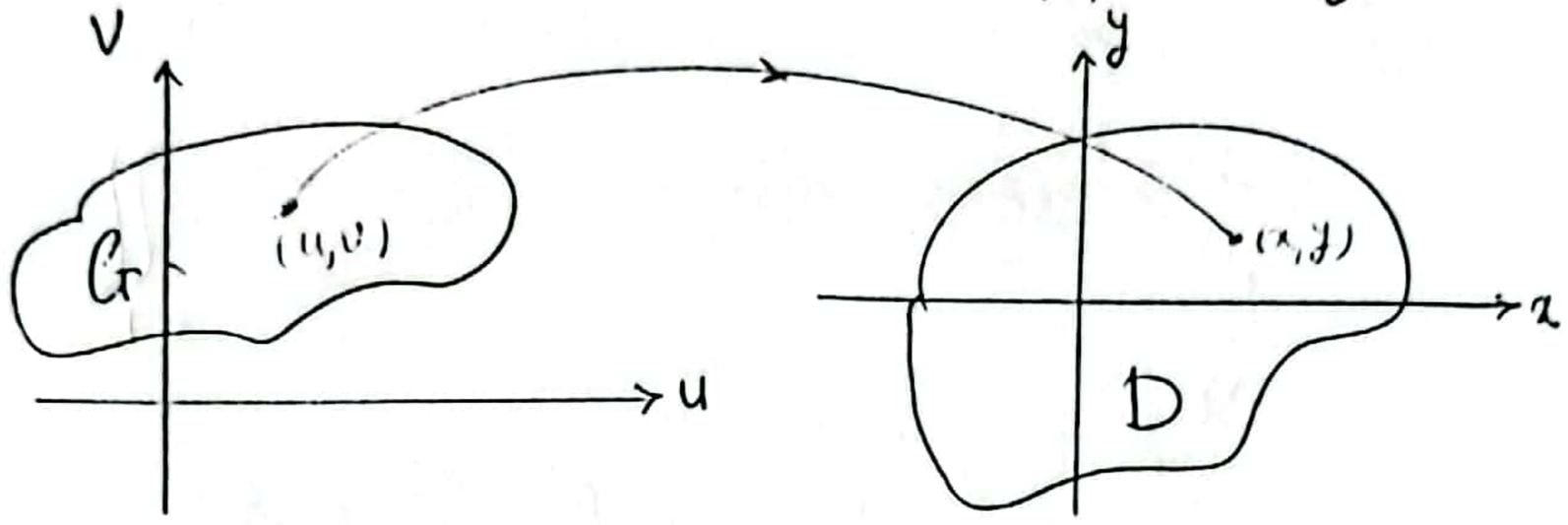
(b) $\begin{cases} x^2+y^2=2ax \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ r^2=a^2\cos 2\theta \end{cases}$

تغییر متغیر در انتگرال های مضاعف

تبدیل یک انتگرال مضاعف به مختصات قطبی تنها حالت خاصی از یک فرمول تغییر متغیر کلی برای انتگرال های مضاعف است. فرض کنید x, y با معادلات $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ به صورت توابعی از دو متغیر u, v بیان شده باشند.

این معادلات معرف یک تبدیل (نگاشت) از نقاط (u,v) در صفحه دکارتی uv به نقاط (x,y) در صفحه xy هستند.



این تبدیل از مجموعه‌ی G در صفحه uv بروی مجموعه‌ی D در صفحه xy یک به یک است مشروط بر اینکه

(i) هر نقطه در G به نقطه‌ای در D نگاشته شود.

(ii) هر نقطه در D نقش اقلیدسی نقطه‌ای در G باشد.

(iii) نقاط مختلف در G به نقاط مختلفی در D نگاشته شوند.

اگر تبدیل یک به یک باشد، معادلات معرف را می‌توان نسبت به u, v بصورت تابعی از x, y حل کرد

تبدیل معکوس $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ حاصل از D به روی G، یک به یک است.

در اینصورت D را تصویر G تحت تبدیل و G را تصویر وارون D می‌نامیم. هر تابع $f(x,y)$ که روی D تعریف شده است را می‌توان به صورت تابع $f(x(u,v), y(u,v))$ تصور کرد که روی G تعریف شده است.

سوال اینجاست که ارتباط انتگرال $f(x,y)$ روی D با انتگرال $f(x(u,v), y(u,v))$ روی G چگونه است.

اگر توابع $x(u,v)$، $y(u,v)$ دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشند، $J(u,v)$ در (u,v) مخالف صفر باشد آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$= \iint_G g(u,v)\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \cdot \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(u,v)}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = (x,y)\frac{\partial}{\partial}$$

مثال. مطلوبیت محاسبه انتگرال های زیر

(a) $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy$, D ناحیه محصور توسط خطوط $x=0$، $y=0$ و $x+y=1$ است.

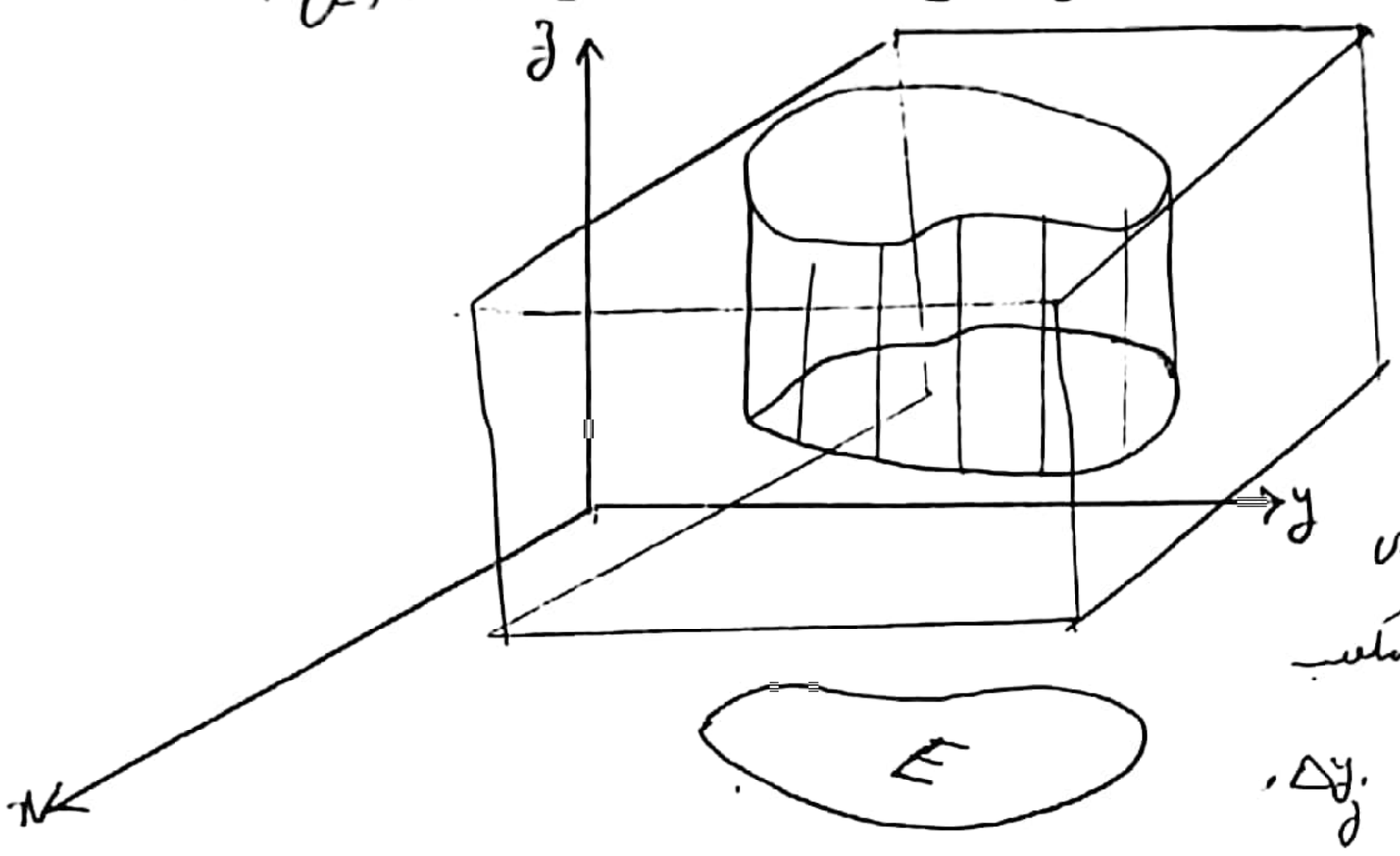
(b) $\iint_D dx\,dy$ D ناحیه محدود به منحنی های $xy=1$، $xy=3$، $x(1-y)=1$ و $x(1-y)=2$ واقع در ربع اول صفحه xy

(c) $\iint_D dx\,dy$ D ناحیه محدود به هذلولی های $y=\frac{1}{x}$ و $y=\frac{9}{x}$ و خطوط $y=x$ ، $y=4x$

انتگرال های سه گانه

از انتگرال های سه گانه برای بدست آوردن حجم اشکال سه بعدی، جرم، گشتاور و مختصات مرکز جسم و مقادیر متوسط توابع سه متغیره استفاده می نماییم.

فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی باشد که روی ناحیه بسته و کراندار D در فضا تعریف شده باشد. مثلا ناحیه اشغال شده توسط یک قوطی فلزی یا تلی از خاک. با توجه به اینکه D ناحیه ای کراندار در $\mathbb{R}^3$ است لذا زیر مجموعه مکعب $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ است. فرض کنید D ناحیه ای باشد که از بالا و پایین بسطوح $z=f_2(x,y)$ و $z=f_1(x,y)$، از طرفین با استوانه $H(x,y)=0$ محدود است.



بازه های $[a,b]$، $[c,d]$ و $[e,f]$ را بترتیب به m، n، l قسمت مساوی تقسیم کنید. لذا ناحیه D به مکعب مستطیل هایی با ابعاد Δx_i، Δy_j، Δz_k تقسیم می شود که در آن

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1},\quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

فرض کنید مکعب مستطیل N درون D قرار گیرد. از مکعب مستطیل فوق نقطه $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ را بدلخواه انتخاب کرده و مجموع ریمان زیر را تشکیل دهید

$$R(f,P) = S_N = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V_{ijk}$$

where

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

let $\|P\| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}$

هرگاه $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P)$ موجود باشد آنگاه انتگرال سه گانه f بر D موجود بوده (f بر D انتگرال پذیر) و مقدار انتگرال f بر D برابر مقدار حدی مجموع ریمان است.

$$\iiint_D f\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} R(f,P)$$

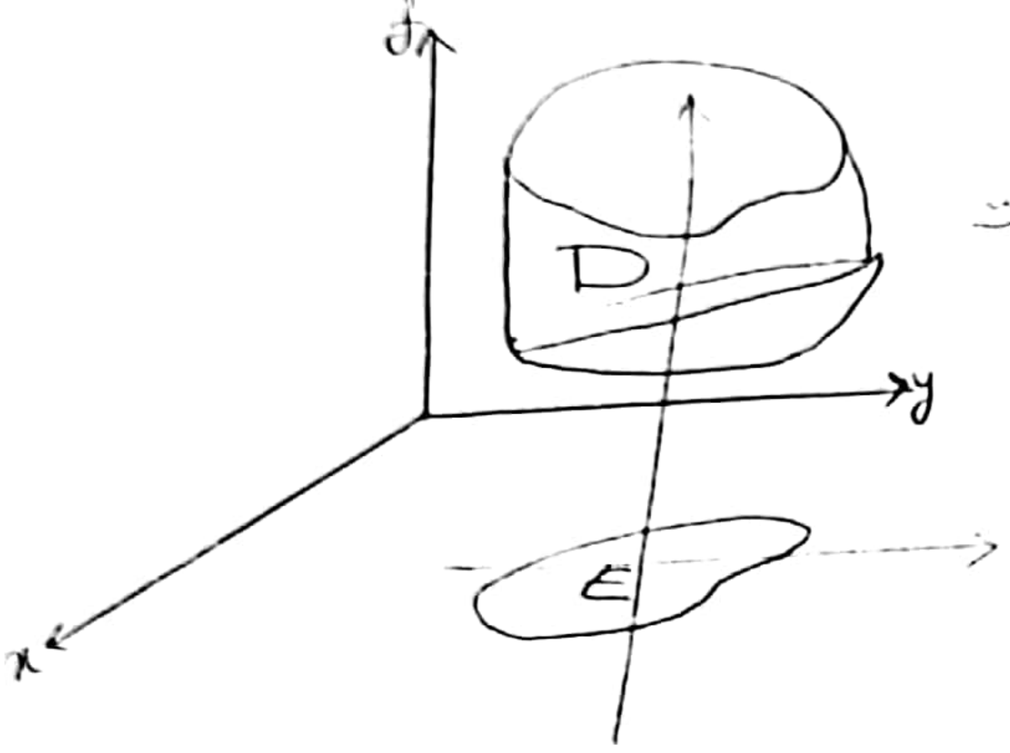
تعریف. هرگاه f بر ناحیه‌ی بسته و کراندار D از $\mathbb{R}^3$ پیوسته باشد آنگاه $\iiint_D f\,dV$ موجود است و مقدار آن از انتگرال زیر محاسبه می‌شود

$$\iiint_D f\,dV = \iint_E \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

که در آن E حدود تصویر D بر صفحه xy است،

$$D = \{(x,y,z) : H(x,y)=0,\ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$$

نحوه تعیین حدود انتگرال‌گیری در انتگرال‌های سه‌گانه



روی ناحیه D، ابتدا نسبت به z، سپس نسبت به y و در نهایت نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

1- ترسیم

تصویر ناحیه D یعنی E را در صفحه xy رسم کنید.

(تصویر قائم)

2- حدود انتگرال‌گیری z

خط M را که از نقطه (x,y) در E به موازات محور zها می‌گذرد، رسم کنید. با افزایش z خط M در $z=f_1(x,y)$ به D وارد و در $z=f_2(x,y)$ از آن خارج می‌گردد.

3- حدود انتگرال‌گیری y

خط L را از نقطه (x,y) موازی با محور yها رسم کنید با افزایش y، خط L در $y=g_1(x)$ به E وارد و در $y=g_2(x)$ از آن خارج می‌گردد.

$$\iiint_D f\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

همه خواص انتگرال‌های مضاعف و حالت‌های خاص برای انتگرال‌های سه‌گانه دارند.

اگر $f(x,y,z)=1$ آنگاه $V=\iiint_D dV$

انتگرال سه‌گانه تابع $f(x,y,z)$ (مثبت) را می‌توان به صورت «ابرحجم» (یعنی حجم چهاربعدی) یک ناحیه در فضای چهاربعدی که مجموعه D قاعده‌ی سه‌بعدی آن است و برشش روی ابرسطح $w=f(x,y,z)$ است تعبیر کرد. این یک تعبیر سودمند نیست، تعبیرهای سودمندتری در کاربردها ظاهر می‌شوند. مثلاً اگر $\delta(x,y,z)$ نشان

چگالی (جرم بر واحد حجم) در موضع (x,y,z) در زیرفضایی باشد که قلمرو D در فضای سه بعدی گرفته است، جرم m جسم، مجموع عنصرهای جرم $dm=\delta(x,y,z)dv$ عناصر حجم dv است. لذا

$$m=\iiint_D \delta(x,y,z)\,dv$$

مثال. انتگرال های سه گانه زیر را محاسبه کنید.

(a) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} (2+x-\sin z)\,dv$

(b) $\displaystyle\iiint_B (xy^2+z^3)\,dv$, B جعبه مکعب مستطیل $0\le x\le a$ ، $0\le y\le b$ ، $0\le z\le c$ است.

(c) $\displaystyle\iiint_D (z-y)\,dx\,dy\,dz$, D حجم محصور در $\frac{1}{8}$ اول فضا توسط صفحه $x+y+z=2$ است.

(d) $\displaystyle\iiint_D (y+z)\,dx\,dy\,dz$, D ناحیه محصور بین صفحات $x=0$ ، $z=0$ ، $x+z=2$ و سطح $z=1-y^2$ است.

تغییر متغیر در انتگرال های سه گانه

فرض کنید G ناحیه‌ای بسته و کراندار در فضای متغیرهای u, v, w و توابع $x = x(u,v,w)$ ، $y = y(u,v,w)$ ، $z = z(u,v,w)$ بیوسته هستند. در اینصورت تبدیل $G \subseteq \mathbb{R}^3$ با شکل نسبت به متغیرهای u, v, w و برای مشتقات جزئی اول

$$T: G \longrightarrow D(\subseteq \mathbb{R}^3)$$

$$T(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$

به هر نقطه $(u,v,w) \in G$ نقطه‌ای مانند $(x,y,z) \in D$ نظیر می‌کند. در این حالت D را تصویر G تحت تبدیل T و G را تصویر وارون D می‌نامیم. هر تابع $f(x,y,z)$ که روی D تعریف شده است را می‌توان به صورت $g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ تصور کرد که روی G تعریف شده است.

اگر تبدیل T از G در فضای uvw به روی تصویر D در فضای xyz، $1-1$، f بر D انتگرال پذیر باشد آنگاه خواهیم داشت

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

که در آن

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

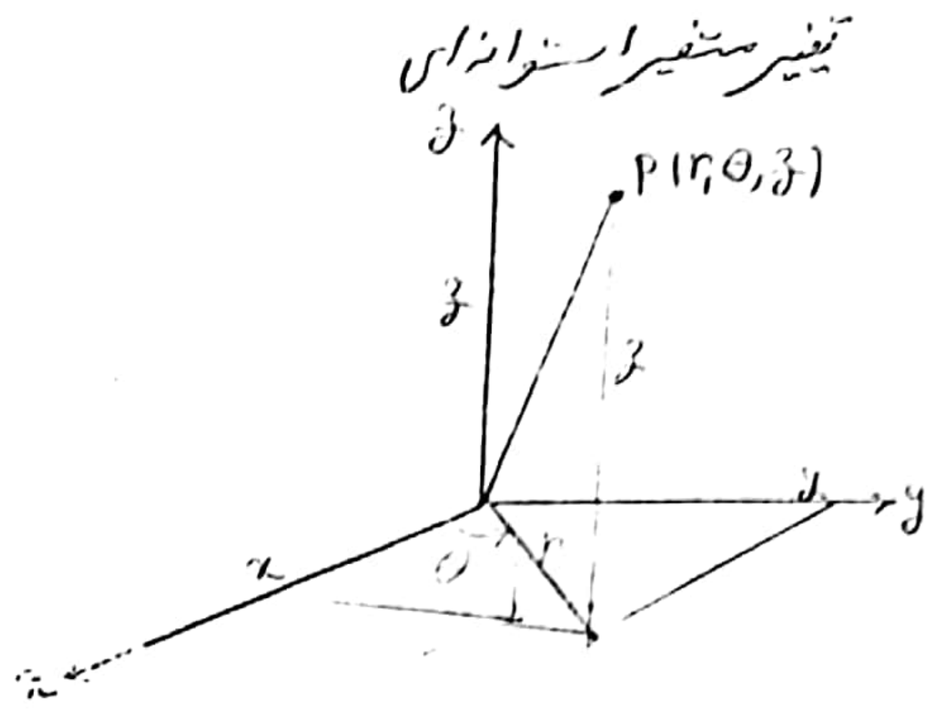
مثال. مطلوبست تعیین حجم بیضی گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$:

$$\begin{vmatrix} u = \frac{x}{a} \\ v = \frac{y}{b} \\ w = \frac{z}{c} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{vmatrix} \quad ; \quad J(u,v,w) = \begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix} = abc$$

$$V = \iiint_D dV = \iiint_G |J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw = \iiint_{\{u^2+v^2+w^2 \le 1\}} abc\,du\,dv\,dw = \frac{4}{3}\pi abc$$

$$\begin{cases} x = x(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta,z) = r\sin\theta \\ z = z(r,\theta,z) = z \end{cases}$$

تغییر متغیر استوانه‌ای



$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$
$$= r$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

مثال. مطلوبست محاسبه هریک از انتگرال‌های زیر در ناحیه‌ی ذکر شده.

(i) $\iiint_D (x+y)\,dx\,dy\,dz$ ، D قسمتی از استوانه $x^2+y^2=1$ واقع بین صفحات $z=0$ و $z=3$.

$$I = \iiint_E (x+y)\,dz\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^3 r(\cos\theta+\sin\theta)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta \int_0^1 r^2\,dr \int_0^3 dz$$

$$= 3\times\frac{1}{3}\times(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(ii) $\iiint_D \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ، D ناحیه‌ای از کره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ که زیر صفحه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ قرار دارد.

$$x^2+y^2=4$$
$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2\pi \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 \frac{z}{r}\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4r-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^2 d\theta = \pi\left(8-\frac{8}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}$$

مثال. مطلوبست حجم درون استوانه $x^2+y^2=4$ بین صفحات $x+y+z=-2$, $x+y-z=2$

مثال. حجم ناحیه های زیر را بیابید.

(a) حجم درون استوانه $x^2+y^2=2x$ که در نیم‌کره محدود شده توسط مخروط $z^2=x^2+y^2$.

(b) حجم ناحیه توپر واقع در کره $x^2+y^2+z^2=6$ و بالای سهمی‌گون $z=x^2+y^2$.

(c) حجم ناحیه توپر T که از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$ که اندازه‌اش با محور z زاویه α می‌سازند.

(d) حجم ناحیه محصور بین صفحات مختصات، صفحه $2x+y+2z=4$ و $\frac{1}{8}$ فضای زیر صفحه $z=1$.

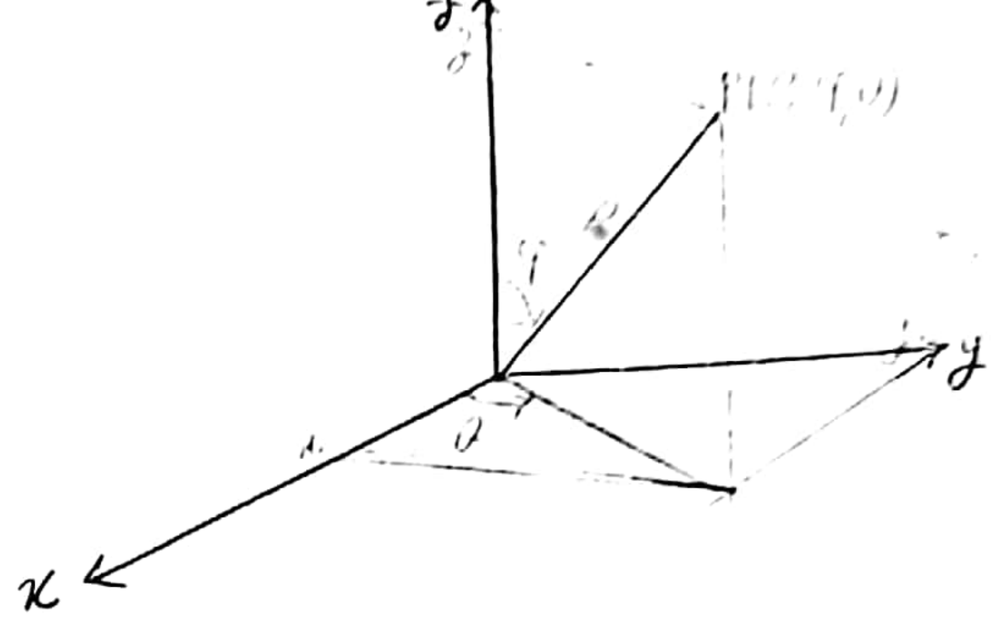
$$V = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}r^3\cot\alpha\right]\Bigg|_0^{a\sin\alpha}$$

$$= \frac{2\pi}{3}a^3\left[1-\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cot\alpha\right] = \frac{2\pi}{3}\left[1-\cos^3\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\right]$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos\alpha)$$

if $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = \frac{2\pi}{3}a^3$

تغییر متغیرها به کروی



$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = y(\rho,\varphi,\theta) = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = z(\rho,\varphi,\theta) = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

also

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2 = r^2+z^2$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \rho\sin\varphi$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \tan\varphi = \frac{r}{z}$$

θ در نقاط روی محور z ها بی معنی است. $r=0$ یعنی $\varphi=0$ یا $\varphi=\pi$ و

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\varphi\left|\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\right|$$

$$+\rho\sin\varphi\left|\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta\right| + 0$$

$$= \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi + \rho^2\sin^3\varphi$$

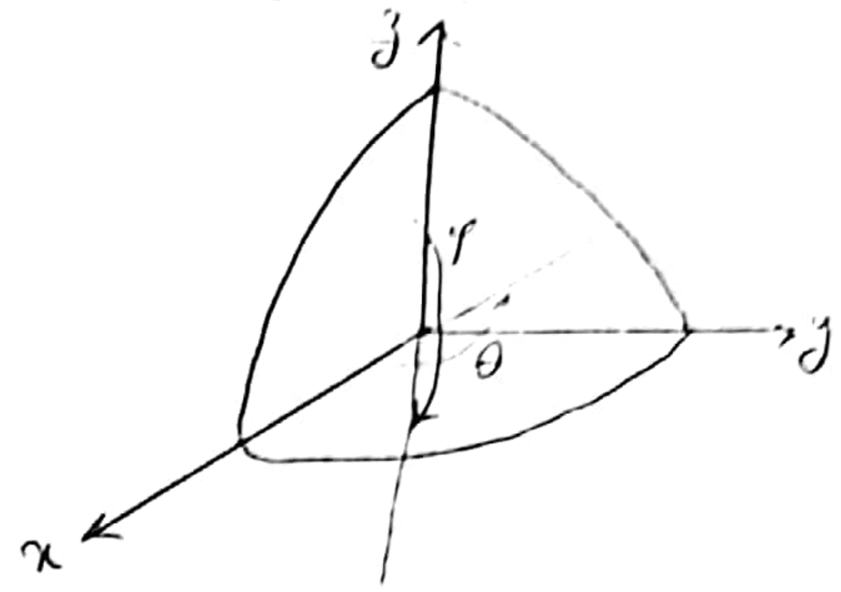
$$= \rho^2\sin\varphi$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G F(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

مثال. حجم یکی از انتگرال‌های زیر را توان انتگرال‌گیری مکعبی بیابید.

(i) $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$

D ناحیه درون کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $y\geq 0$.



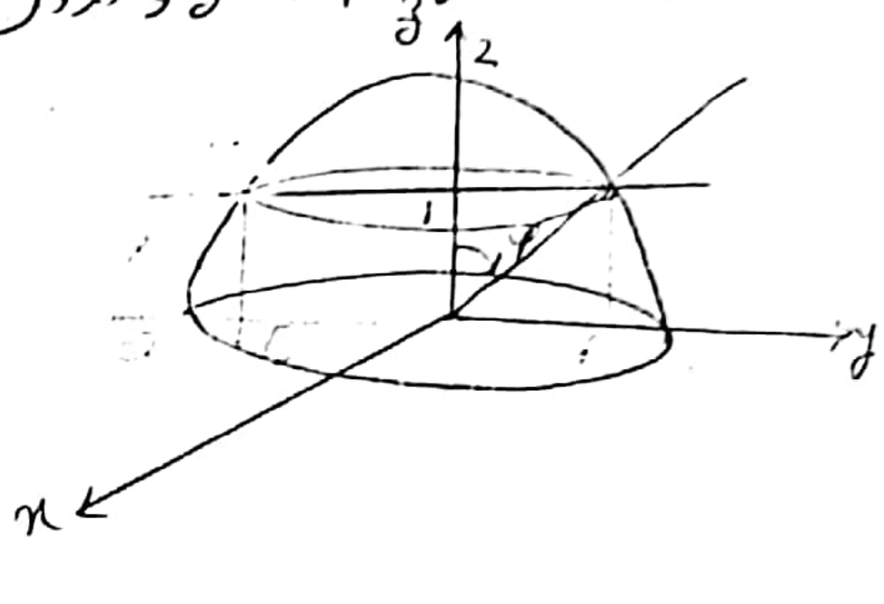
$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}-[\cos\varphi]_0^{\pi}\,d\theta=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

(ii) $\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$

D ناحیه بالای صفحه $z=1$ و درون کره $x^2+y^2+z^2=4$



$$r^2+z^2=4\Rightarrow r=\pm\sqrt{3}$$

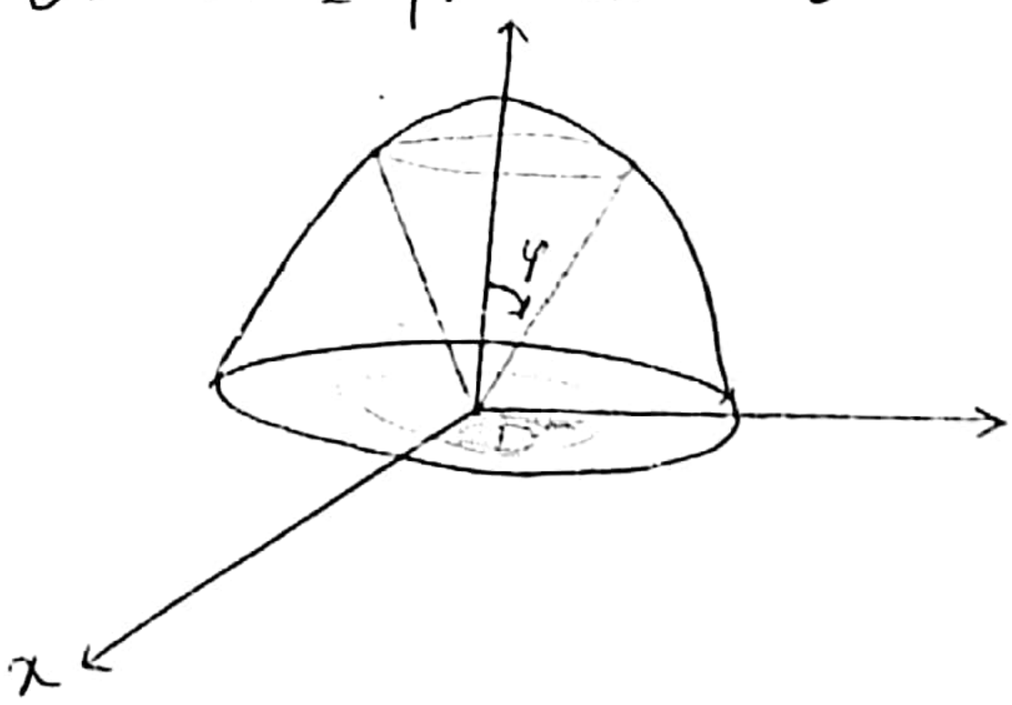
$$\tan\varphi=\frac{r}{z}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2}\frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2-\frac{1}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi\,d\varphi=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\varphi-\tan\varphi)\,d\varphi$$

مثال. مطلوبست حجم ناحیه محدود از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و از بالا به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$z=r\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$$



$$V=4\iiint_D dV$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\,d\theta$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

مثال. گشتاور ماند یک جسم با چگالی δ که ناحیه D را اشغال کرده است حول محور Oz از انتگرال زیر محاسبه می‌شود

$$I = \iiint_D (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dv$$

این گشتاور را برای جسمی حساب کنید که چگالی‌اش یک بوده و ناحیه داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و خارج استوانه $x^2+y^2=a^2$ را اشغال کرده است.

انتگرال گیری در میدان های برداری

تاکنون مفهوم انتگرال فقط روی مجموعه های مسطح بوده است، یک بازه در $\mathbb{R}$، یک ناحیه در صفحه و به طور کلی یک ناحیه تعدد در $\mathbb{R}^2$. نمونه اشیاء خمیده، یک خم در $\mathbb{R}^n$، یک رویه در $\mathbb{R}^3$ یا یک مجموعه تراز یک تابع غیر خطی $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ است. مفهوم انتگرال روی اینگونه مجموعه ها کاربردهای اساسی هم در درون و یا مماسات و هم در بیرون آن دارد. در باقیمانده درس، مفهوم انتگرال روی خم ها و رویه ها کمک اصلی بحث خواهد بود.

انتگرال روی خط

هرگاه یک سیم کج راستا محور x ها از $x=a$ تا $x=b$ کشیده شده است دارای چگالی خطی δ واحد جرم بر واحد طول باشد آنگاه جرم کل سیم مساوی $m = \delta(b-a)$ است. هرگاه چگالی سیم ثابت نباشد ولی نقطه به نقطه به طور پیوسته تغییر کند (مثلاً بخاطر اینکه ضخامت سیم یکنواخت نیست) آنگاه باید جرم کل سیم را با جمع بندی (یعنی انتگرال گیری) از عنصر دیفرانسیل جرم $dm = \delta(x)dx$ پیدا کرد

$$m = \int_a^b \delta(x)dx$$

به طور کلی انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ نمایش مقدار کل کمیتی است که در راستای محور x ها بین a و b بر حسب چگالی خطی $f(x)$ آن در نقطه x توزیع شده است. مقدار کمیت در یک بازه بی نهایت کوچک طول dx در x مساوی $f(x)dx$ است و انتگرال این سهم های بی نهایت کوچک (عنصر) را جمع بندی می کند و مقدار کل کمیت را بدست می دهد. به همین نحو $\iint_D f(x,y)dA$ ، $\iiint_R f(x,y,z)dV$ نمایش مقادیر کل کمیت توزیع شده روی ناحیه D در صفحه و R در فضای سه بعدی بر حسب چگالی های سطح یا حجم این کمیات اند. ممکن است یک کمیت با چگالی خطی مشخص در امتداد یک منحنی در صفحه یا فضای سه بعدی یا با چگالی سطح مشخص شده روی یک سطح در فضای سه بعدی توزیع شده باشد. در این حالت ها شرط می کنیم که انتگرال های خط یا انتگرال های سطح عناصر توزیع شده را جمع کرده و کل کمیت را محاسبه کنند.

منحنی هموار

فرض کنید C یک منحنی پارامتری کراندار و پیوسته در $\mathbb{R}^3$ باشد. C یک منحنی هموار است اگر یک پارامتری سازی

به شکل زیر داشته باشد

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad , \quad t \in I$$

که بردار سرعت $V = \frac{dr}{dt}$ آن پیوسته و ناصفر است.

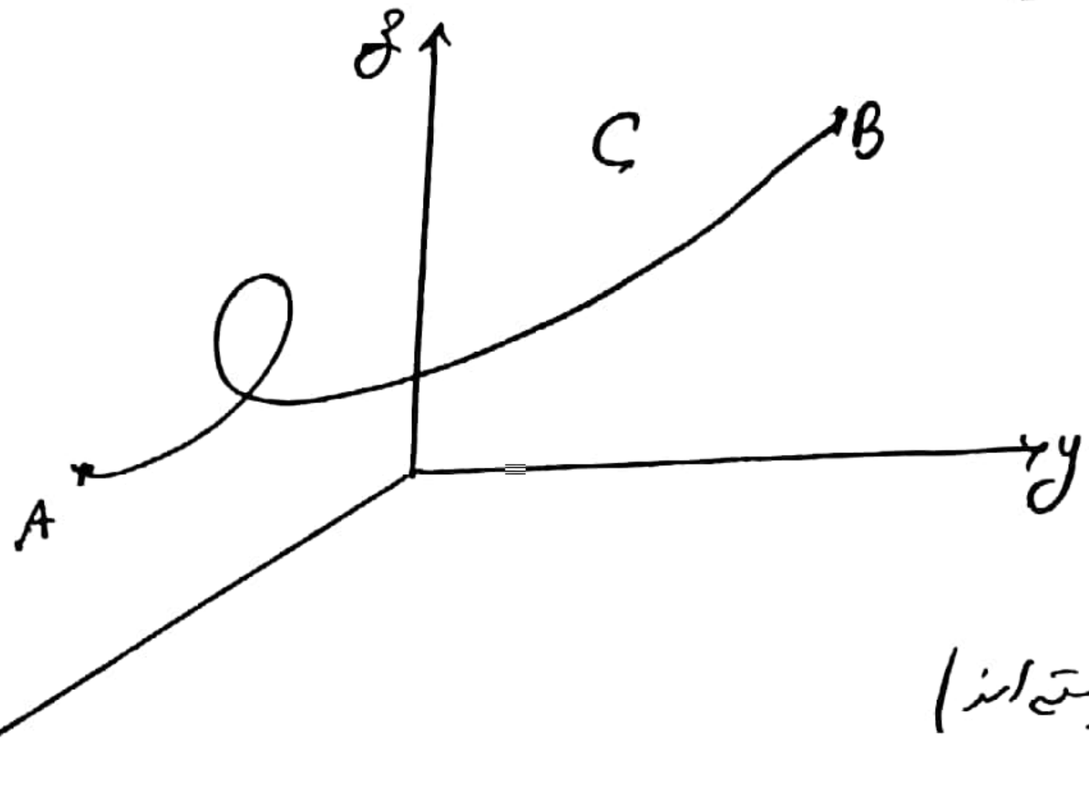
قوس هموار

C را یک قوس هموار گوییم اگر یک منحنی هموار با بازه پارامتری متناهی $I=[a,b]$ باشد.

تعریف انتگرال خط

فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی کراندار برنامه‌ای کراندار $E \subseteq \mathbb{R}^3$ باشد، C یک منحنی هموار بر E که

معادلات آن به شکل زیر هستند



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

($x'(t), y'(t), z'(t)$ توابعی پیوسته‌اند)

افراز $P = \{\Delta c_1, \Delta c_2, \dots, \Delta c_n\}$ از منحنی C از نقطه‌ی A تا نقطه B را در نظر بگیرید که در آن

$$\Delta s_i = \text{طول قطعه } \Delta c_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\|P\| = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\}$$

نقطه دلخواه (x_i^*, y_i^*, z_i^*) را روی زیرقوس iام اختیار کرده و مجموع ریمان زیر را تشکیل دهید

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,\Delta s_i \qquad (I)$$

هرگاه این مجموع مستقل از انتخاب‌های خاص نقاط (x_i^*, y_i^*, z_i^*) وقتی $\|P\| \to 0$ دارای حد باشد آنگاه تابع f بر C برای انتگرال خط بوده و مقدار حد را با

$$\int_C f(x,y,z)\,ds$$

نمایش می‌دهند.

قضیه. هرگاه C یک قوس هموار و f بر C پیوسته باشد آنگاه $\int_C f\,ds$ موجود است.

تبصره. هرگاه C قطعه قطعه هموار باشد یعنی از تعداد متناهی قوس هموار که سر به سر یکدیگر وصل اند تشکیل شده باشد آنگاه حد (I) برای f پیوسته موجود است.

در این حالت انتگرال خط f در امتداد C، مجموع انتگرال های خط f در امتداد هر قوس هموار است.

محاسبه انتگرال خط

طول (قوس) C با بیان عنصر طول قوس $ds=\left|\frac{dr}{dt}\right|dt$ بر حسب پارامتری سازی

$r=r(t),\ a\le t\le b$ صحیح و انتگرال گیری از $t=a$ تا $t=b$ محاسبه شد

$$\text{طول } C=\int_C ds=\int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right|dt$$

انتگرال های خط کلی تر نیز به همین ترتیب محاسبه می شوند $r=r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$

$$\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_A^B f(x(t),y(t),z(t))\left|\frac{dr}{dt}\right|dt$$

تبصره. مقدار انتگرال خط تابع f در امتداد صحیح C وابسته به f و C است اگر به نحوه پارامتریزه شدن C بستگی ندارد. هرگاه $r=r^*(u),\ \alpha\le u\le\beta$ پارامتری سازی دیگری از صحیح هموار C باشد آنگاه هر نقطه $r(t)$ بر C را می توان بر حسب پارامتری سازی جدید مانند $r^*(u)$ بیان کرد که در آن u تابع t است. $(u=u(t))$. هرگاه $r^*(u)$ صحیح C را عکس نسبت یک $r(t)$ بپیماید آنگاه $u(a)=\alpha$ ، $u(b)=\beta$ و $\frac{du}{dt}\ge 0$. هرگاه $r^*(u)$ صحیح C را برخلاف جهت $r(t)$ بپیماید آنگاه $u(a)=\beta$ ، $u(b)=\alpha$ و در هر حال $\frac{du}{dt}\le 0$.

$$\int_a^b f(r(t))\left|\frac{dr}{dt}\right|dt=\int_a^b f(r^*(u))\left|\frac{dr^*}{du}\,\frac{du}{dt}\right|dt$$

$$=\int_a^b f(r^*(u))\left|\frac{dr^*}{du}\right|du$$

لذا انتگرال خط مستقل از پارامتری سازی صحیح C است.

مثال. یک دایره به شعاع a دارای مرکز مبدأ در صفحه xy است. فرض کنید C نصف این دایره باشد که در نیم صفحه $y \geq 0$ واقع است. با استفاده از پارامتری سازی مختلف، مقدار انتگرال $\int_C y\,ds$ را بیابید.

مثال. انتگرال تابع $f(x,y,z)=2xy+2z-1$ را از نقطه $O(0,0,0)$ تا نقطه $A(1,1,1)$ در امتداد مسیرهای زیر بیابید

(الف) روی خط راست OA

(ب) روی منحنی $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$

(پ) روی خط راست از O به $B(1,0,0)$ و از B به $C(1,1,0)$ و از C به A.

مثال. انتگرال تابع $f(x,y,z)=x^2+xy-z^2+1$ را بر قوسی از نیم دایره $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=2 \end{cases}$ که در آن $-2 \leq x \leq 2$ ، $y \geq 0$ باشد.

انتگرال های خط میدان های برداری

میدان برداری

یک میدان برداری با دامنه ای در صفحه یا فضا تابعی است که به هر نقطه از دامنه خود یک بردار نسبت می دهد.
میدان های برداری از بردارهای دو و سه بعدی دارای شکل زیر هستند

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\,\vec{i} + N(x,y)\,\vec{j}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\vec{i} + N(x,y,z)\,\vec{j} + P(x,y,z)\,\vec{k}$$

در بحث میدان های برداری، یک تابع اسکالر از یک متغیر حقیقی برداری (تابعی از چند متغیر) را اغلب یک میدان اسکالر می نامند. لذا مولفه های یک میدان برداری، یک میدان اسکالر هستند.
میدان های برداری در بسیاری از حالت ها در ریاضیات کاربردی ظاهر می شوند

(الف) میدان ثقلی $\vec{F}(x,y,z)$ ناشی از یک جسم، نیروی جاذبه ای است که جسم بر جرم واحد واقع در صفحه در موضع (x,y,z) وارد می کند.

(ب) میدان نیروی الکتروستاتیک $\vec{E}(x,y,z)$ ناشی از یک جسم با بار الکتریکی، نیروی الکتریکی است که جسم بر بار واحد در موضع (x,y,z) وارد می کند (این نیرو ممکن است جاذبه یا دافعه باشد)

(ج) میدان سرعت $\vec{V}(x,y,z)$ در یک سیال متحرک، سرعت ذره در موضع (x,y,z) است. هرگاه حرکت پایدار نباشد آن گاه میدان سرعت تابع زمان است و $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z,t)$.

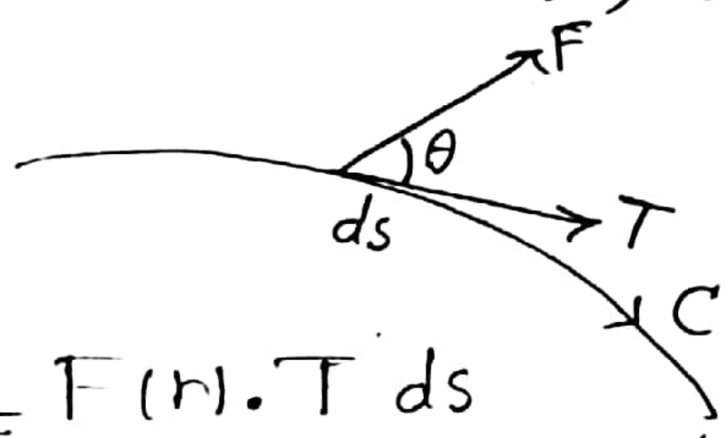
(د) گرادیان $\nabla f(x,y,z)$ میدان اسکالر f جهت و اندازه بیشترین افزایش f در (x,y,z) را نتیجه می دهد. گرادیان دمای $\nabla T(x,y,z)$ یک میدان برداری است که جهت و اندازه بیشترین افزایش دمای T در نقطه (x,y,z) در یک محیط هادی گرما را نتیجه می دهد. گرادیان های فشار، اطلاعات مشابهی راجع به تغییر در یک سیال مانند هوا یا اقیانوس را نتیجه می دهند.

میدان برداری را پیوسته گویند هرگاه مولفه های M، N و P پیوسته باشند.
" " مشتق پذیر " " M، N و P مشتق پذیر ".

کار

در فیزیک مقدماتی، کار یک نیروی ثابت به اندازه F در جهت حرکت یک جسم به میزان d، حاصل ضرب F و d تعریف می‌شود ($W=Fd$) ولی فرض بر این است که نیرو در جهت حرکت جسم وارد می‌شود. وقتی که جسم در جهتی متفاوت با جهت نیرو حرکت کند (به خاطر بعضی نیروهای دیگر وارد بر آن) آنگاه کار انجام شده به وسیله این نیروی ثابت حاصل ضرب مسافت پیموده شده در مولفه نیرو در جهت حرکت است.

کار نیروی متغیر $F(x,y,z)=F(r)$ که بر طول یک منحنی تابع موضع است در حرکت یک جسم در امتداد قسمتی هموار C انتگرال عنصرهای کار dW است. عنصر dW نظیر عنصر طول قوس ds در موضع r بر C مساوی ds ضربدر مولفه مماسی نیروی $F(r)$ در امتداد C در جهت حرکت می‌باشد.



$$dW = F(r)\cdot T\,ds$$

لذا کار انجام شده توسط F در حرکت جسم در امتداد C مساوی است با

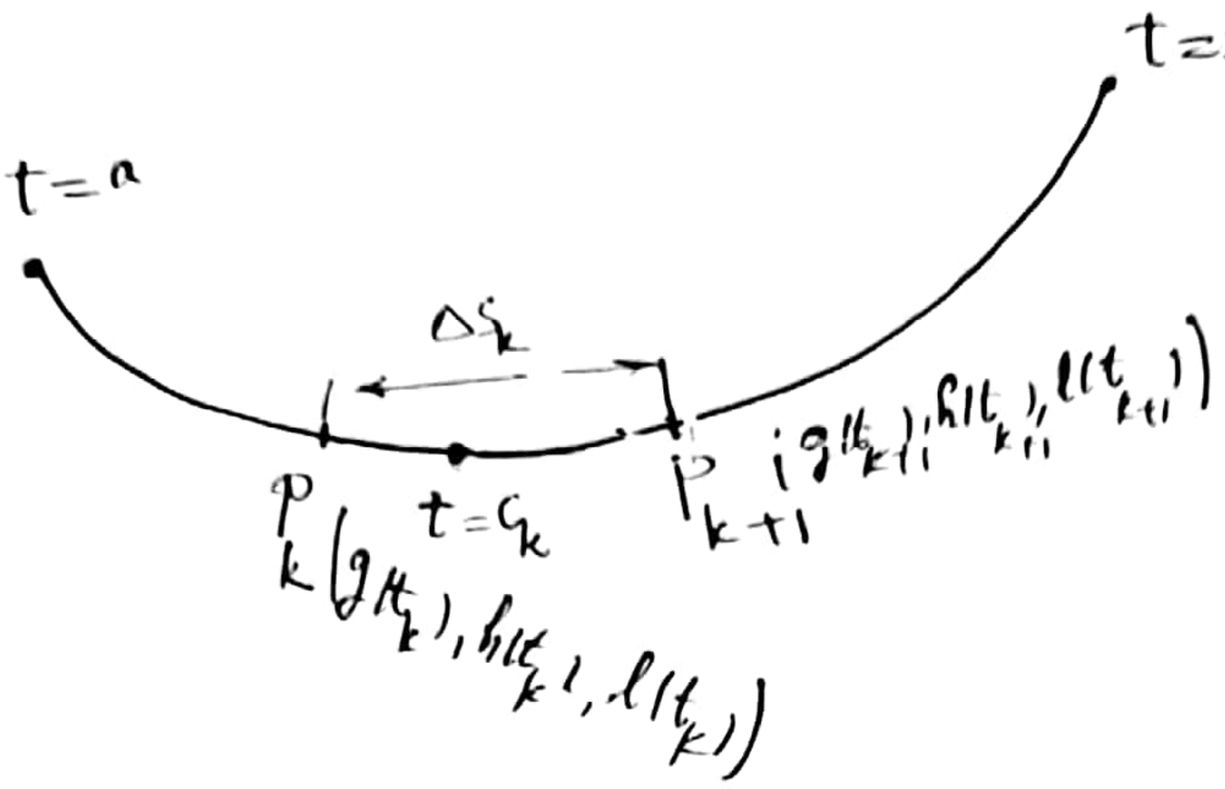
$$W=\int_C F(r)\cdot T\,ds=\int_C F\cdot dr$$

$$\left(\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\vec{i}+\frac{dy}{ds}\vec{j}+\frac{dz}{ds}\vec{k}\Rightarrow d\vec{r}=T\,ds=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow W=\int_C \left(M(x,y,z)\vec{i}+N(x,y,z)\vec{j}+P(x,y,z)\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right)$$

$$=\int M\,dx+N\,dy+P\,dz$$

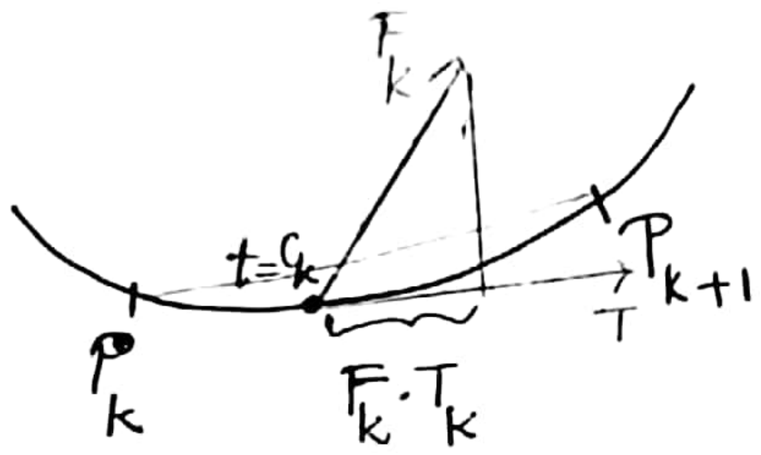
این انتگرال، انتگرال خط F در امتداد منحنی C نیست (انتگرال خط میدان برداری F، مقداری برداری است). در واقع، انتگرال فوق، انتگرال خط مولفه مماسی F است که مقدار اسکالر دارد.



$\vec{F}(t) = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$

P, N, M توابعی از t

$\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



F_k: بردار نیرو در نقطه‌ای روی منحنی متناظر با $t = c_k$

T_k: بردار یکه مماس در این نقطه

$F_k \cdot T_k$ تصویر F در جهت T، $t = t_k$

کار انجام شده توسط نیروی F = مقدار پیشرفت × مولفه نیرو در جهت حرکت $= (F_k \cdot T_k)\Delta s_k$

روی قطعه $P_k P_{k+1}$

کار انجام شده توسط F در امتداد منحنی از $t=a$ تا $t=b$ $\approx \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot T_k \ \Delta s_k$

$$\text{If } \|P\| \to 0 \Rightarrow W = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot T \, ds$$

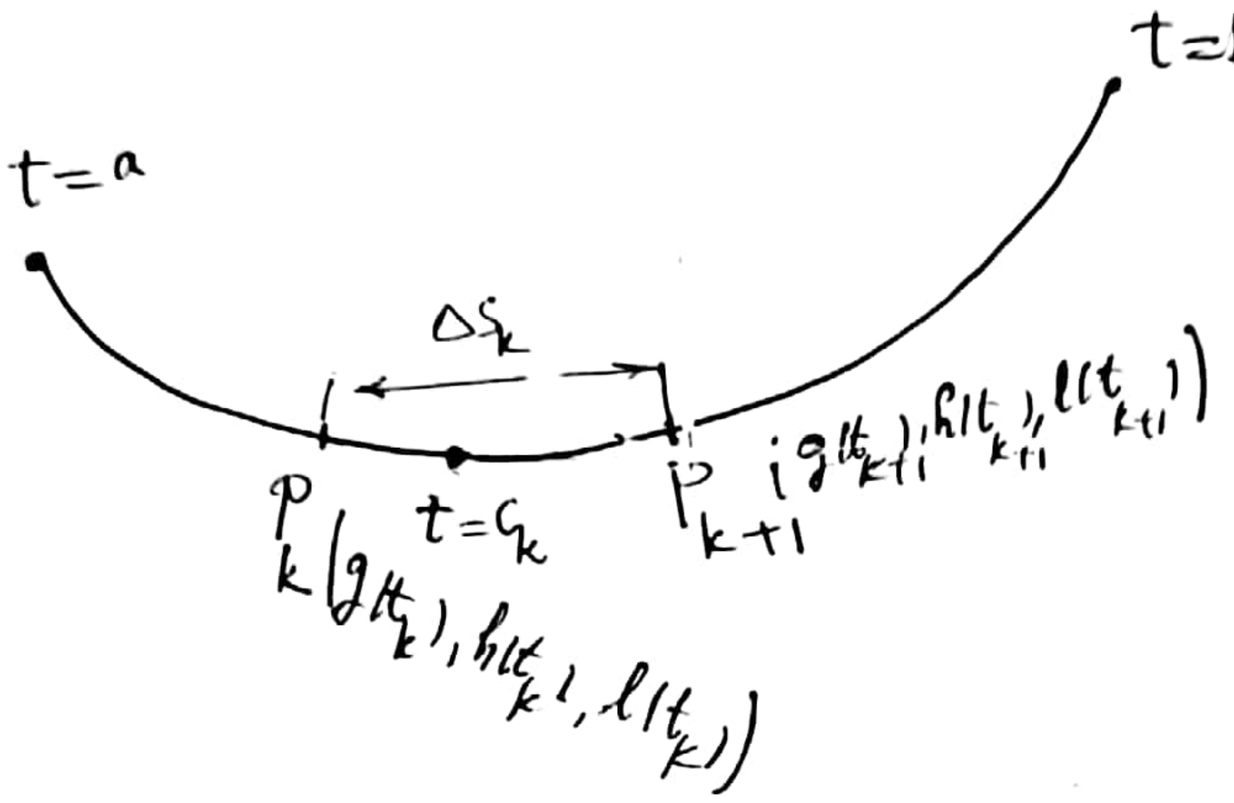
P یک افراز دلخواه

$$\left(\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot T_k \Delta s_k \to \int_a^b F \cdot T \, ds \right)$$

$$W = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot T \, ds = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot dr = \int_a^b F \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt} \right) dt$$

(تعریف) (شکل دیفرانسیل فشرده)

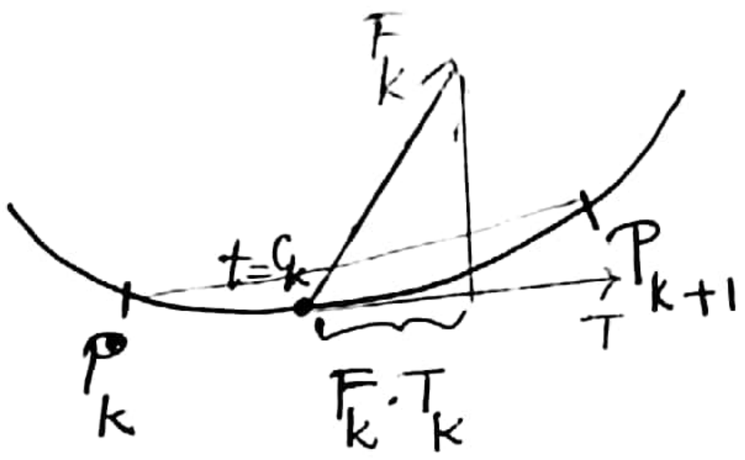
$$= \int_a^b M\,dx + N\,dy + P\,dz$$



$\vec{F}(t) = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$

P, N, M توابعی از $R \subseteq \mathbb{R}^3$ هستند

$\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



F_k: بردار نیرو در نقطه‌ای روی منحنی متناظر با $t = c_k$

T_k: بردار یکه مماس در این نقطه

$F_k \cdot T_k$ تصویر F در جهت T، $t = t_k$

کار انجام شده توسط نیروی F = مسافت جابجایی شده $\times$ مولفه نیرو در جهت حرکت $= (F_k \cdot T_k)\Delta s_k$

روی قطعه $P_k P_{k+1}$

کار انجام شده توسط F در امتداد منحنی از $t=a$ تا $t=b$ $\approx \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot T_k \ \Delta s_k$

If $\|P\| \to 0 \Rightarrow W = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot T \, ds$

P یک افراز دلخواه

$\left(\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot T_k \Delta s_k \to \int_a^b F \cdot T \, ds \right)$

$$W = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot T \, ds = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot dr = \int_a^b F \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt} \right) dt$$

(تعریف) (شکل دیفرانسیل فشرده)

$$= \int_a^b M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

این انتگرال برخلاف انتگرال خط مسطح مورد بحث قبل، وابسته به تغییر جهت C است. تغییر جهت C این انتگرال را تغییر علامت خواهد داد.

انتگرال بی جریان و گردش

فرض کنید $F = Mi + Nj + Pk$ به جای یک میدان نیرو، یک میدان سرعت جریان سیالی در ناحیه‌ای از فضا باشد (مثلاً جریان آب در خروجی لگن ظرفشویی یا اتاقک تونل بین یک مولد هیدروالکتریک) هرگاه $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ یک مختنی (خم) هموار در دامنه میدان برداری F باشد، جریان روی مختنی از $t=a$ تا $t=b$ انتگرال $F.T$ روی مختنی از a تا b است.

$$\text{جریان} = \int_a^b F.T\,ds \qquad a \le t \le b$$

این انتگرال را انتگرال جریان می نامند.

اگر مختنی یک حلقه بسته باشد جریان را گردش حول مختنی می نامند.

(اگر C یک مختنی بسته باشد، انتگرال خط مولفه مماسی F حول C گردش F حول C نیز نام دارد)

اغلب بسته بودن مختنی با یک دایره کوچک روی علامت انتگرال نشان داده می شود.

$\oint_C F.dr$ گردش F حول مختنی بسته C

انتگرال خط یک میدان برداری پیوسته مانند انتگرال خط یک میدان اسکالر را می توان با استفاده از یک پارامتری سازی، مسیر انتگرال گیری را به یک انتگرال معمولی مبدل کرد.

برای مختنی هموار

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad , \quad a \le t \le b$$

داریم

$$\int_C F.dr = \int_a^b F.\frac{dr}{dt}\,dt = \int_a^b \left[M(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + N(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + P(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt} \right] dt$$

با آنکه این نوع انتگرال با تغییر جهت C تغییر علامت می دهد ولی از پارامتری سازی خاص برای C مستقل است.

مثال. کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}=3\vec{i}+(x+y)\vec{j}+xz\vec{k}$ از نقطه $O(0,0,0)$ به نقطه $A(1,1,1)$ در مسیرهای

(الف) خط راست OA (ب) خمی $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ (پ) خط راست AO

را بیابید.

مثال. میدان $\vec{F}(x,y)=(2x+y)\vec{i}+(x-2y)\vec{j}$ مفروض است. مطلوبست محاسبه $\int_C F.dr$ در امتداد مسیرهای زیر

(الف) C قسمتی از سهمی $y^2=x$ از نقطه $A(1,1)$ به نقطه $B(1,-1)$

(ب) C قطعه خط راست AB از A به B

(پ) C قسمتی از یک خمی منظم به معادلات $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, a\le t\le b$ از A به B.

مثال. یک میدان سرعت برابر $F = xi + yk + zj$ است. جریان را در امتداد مارپیچ $r(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ تعیین کنید.

$$F = xi + zj + yk = (\cos t)i + tj + (\sin t)k$$

$$\frac{dr}{dt} = (-\sin t)i + (\cos t)j + k$$

$$F \cdot \frac{dr}{dt} = -\sin t \cos t + t\cos t + \sin t$$

$$\text{جریان} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot \frac{dr}{dt}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t \cos t + t\cos t + \sin t)\, dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

مثال. گردش میدان $F = (x-y)\vec{i} + xj$ را حول دایره $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$ $0 \le t \le 2\pi$ حساب کنید.

$$\frac{dr}{dt} = (-\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j}$$

$$\text{گردش} = \int_0^{2\pi} F \cdot \frac{dr}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t)\, dt = 2\pi$$

شار گذرنده از یک خم (منحنی) در صفحه

برای تعیین نسبتی که سیال، نامیده محدود به خم هموار C در صفحه xy را ترک یا به آن وارد می‌شود، انتگرال روی خم C تابع $\vec{F} \cdot \vec{n}$، مولفه‌ی قائم میدان سرعت سیال، را در جهت بردار یکه برون سوی قائم بر منحنی محاسبه می‌کنیم. مقدار این انتگرال شار گذرنده از C نامیده می‌شود. در بسیاری از کاربردها که عملاً هیچ حرکتی دیده نمی‌شود (مثلاً اگر F یک میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد) با وجود این، باز انتگرال $\vec{F} \cdot \vec{n}$ حول خم C شار نامیده می‌شود.

تعریف. اگر C یک منحنی بسته هموار در دامنه میدان پیوسته $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ در صفحه بوده و n بردار یکه‌ی برون سوی قائم بر خم C باشد، شار F روی C توسط انتگرال خط زیر بیان می‌شود

$$\text{شار } F \text{ گذرنده از } C = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds \qquad (*)$$

شار F روی C، انتگرال خم $\vec{F} \cdot \vec{n}$ نسبت به طول قوس است.

گردش F روی C، انتگرال خم $\vec{F} \cdot \vec{T}$ نسبت به طول قوس است.

شار انتگرال مولفه‌ی قائم F و گردش، انتگرال مولفه‌ی مماسی F است.

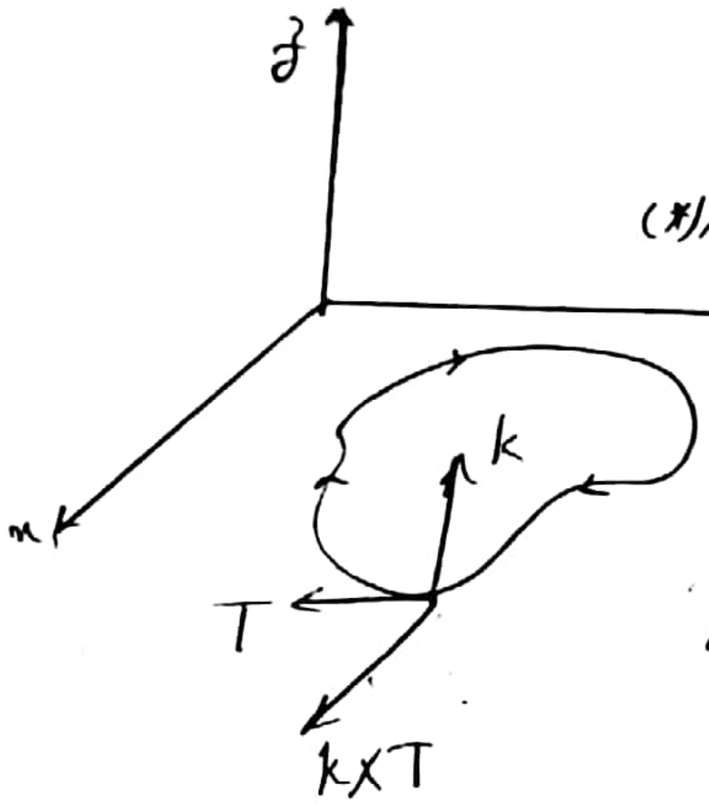
برای محاسبه انتگرال (*) با شکل پارامتری زیر شروع می‌کنیم

$$r = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad a \le t \le b$$

که با ازدیاد t، منحنی C را دقیقاً یکبار از a تا b می‌پیماید.

بردار یکه قائم برون سوی n را با ضرب خارجی بردار یکه مماس بر منحنی، T، با بردار k بدست آورد.

روش انتخاب $k \times T$ یا $T \times k$ به جهت حرکت بستگی دارد. اگر حرکت در جهت عقربه‌های ساعت باشد $k \times T$، در غیر اینصورت $T \times k$.



چون مقدار طول قوس در انتگرال تعریف شده در معادله (*) به روش پیمودن وابسته نیست، پس در رابطه‌ای که برای محاسبه انتگرال معادله (*) نتیجه خواهیم گرفت فرض بر این است که جهت حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده است.

$$\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k} = \left(\frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j}\right) \times \vec{k} = \frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}$$

$$F = M\vec{i} + N\vec{j}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_C \left(M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}\right) ds = \oint_C M\,dy - N\,dx$$

○ بیانگر این است که انتگرال روی منحنی بسته C و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

مثال. شار میدان $F = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ گذرنده از دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy را حساب کنید

دقیقاً یکبار دایره را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌پیماید.

$$r(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\text{شار} = \oint_C M\,dy - N\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t)\,dt = \pi$$

$$\begin{cases} M = x - y = \cos t - \sin t, & dy = d(\sin t) = \cos t\,dt \\ N = x = \cos t, & dx = d(\cos t) = -\sin t\,dt \end{cases}$$

شار F حول دایره برابر π است. چون جواب مثبت است، سیال به سمت خارج روان است.

استقلال از مسیر، تابع پتانسیل و میدان‌های پایستار

در میدان‌های الکتریکی و گرانشی، مقدار کاری که برای حرکت یک بار الکتریکی یا یک جرم از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر انجام می‌گیرد فقط به موقعیت ابتدایی و انتهایی جسم وابسته است و نه به مسیری بین آن دو. این بخش در مورد مفهوم استقلال انتگرال کار از مسیر بحث کرده و خواص بالا را برای میدان‌هایی که انتگرال کار روی آن‌ها مستقل از مسیر است را بیان می‌کند

استقلال از مسیر

اگر A و B دو نقطه در ناحیه باز D در فضا باشند، کار $\int F.dr$ در حرکت یک ذره از A به B توسط میدان F که در D تعریف شده است، معمولاً به مسیری که بستگی دارد. برای برخی میدان‌های خاص مقدار انتگرال برای همه مسیرها از A به B یکسان است. اگر این خاصیت برای تمام نقاط A و B در D برقرار باشد گوییم $\int F.dr$ در D مستقل از مسیر بوده و F پایستار است.

تعریف. فرض کنید میدان F در ناحیه باز D در فضا تعریف شده باشد. همچنین فرض کنید کار $\int_A^B F.dr$ انجام شده در حرکت از A به B برای هر دو نقطه دلخواه از D بازای کلیه مسیرها از A به B یکسان باشد. در اینصورت $\int F.dr$ در D مستقل از مسیر بوده و F در D پایستار است.

میدان گرادیان

فرض کنید D ناحیه‌ای باز در $\mathbb{R}^3$ باشد (یعنی هر نقطه در D مرکز گوی‌ای است که کاملاً در D واقع است). همچنین فرض کنید $F: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری تعریف شده بر D باشد. در اینصورت میدان F را بر D یک میدان گرادیان (بقا) گویند هرگاه تابع مشتق پذیری مانند $\varphi: D \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall (x,y,z) \in D, \quad \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi(x,y,z)$$

در این حالت φ را یک پتانسیل (اسکالر) برای F بر D می‌نامیم.

پتانسیل الکتریکی، تابع اسکالری است که میدان گرادیان آن یک میدان الکتریکی است و پتانسیل گرانشی، تابع اسکالری است که میدان گرادیان آن یک میدان گرانشی است.

انتگرال های روی خم در میدان های برداری

قضیه اساسی انتگرال های خطی (روی خم)

۱- فرض کنید میدان برداری $F = M_i + N_j + P_k$ دارای مولفه های پیوسته در ناحیه همبند باز D در فضا باشد. آنگاه شرط لازم و کافی برای وجود تابع مشتق پذیری مانند f که

$$F = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

باشد، آن است که برای کلیه نقاط A , B در D مقدار $\int_A^B F.dr$ مستقل از مسیر بین دو نقطه‌ی A, B در D باشد.

۲- اگر انتگرال مستقل از مسیر از A به B باشد، مقدار آن برابر است با

$$\int_A^B F.dr = f(B) - f(A)$$

(به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای آنکه $\int_C F.dr$ مستقل از مسیر انتگرال گیری باشد، آن است که F یک میدان گرادیان (پتا) باشد.

قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه F یک میدان گرادیان باشد آن است که

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

مثال. میدان $F(x,y,z) = zi + (y+1)j + xk$ مفروض است.

(الف) نشان دهید F یک میدان بقاست و تابع پتانسیل متناظر با آن را تعیین کنید.

(ب) $\int_C F.dr$ را در امتداد منحنی $C: \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = 2t \\ z = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ از نقطه‌ی $A(t=0)$ به نقطه B در $t=1$ بیابید.

$$F = zi + (y+1)j + xk$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 1 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}$$

لذا F یک میدان بقاست.

$$\exists f, \text{ s.t } \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z)$$

$$M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = z \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y+1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x \end{cases} \longrightarrow f(x,y,z) = \int z\,dx = xz + g(y,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = y+1 \Rightarrow g(y,z) = \frac{y^2}{2} + y + h(z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = xz + \frac{y^2}{2} + y + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + h'(z) = x \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C$$

therefore

$$f(x,y,z) = xz + \frac{y^2}{2} + y + C$$

$$\int_C F.dr = \int_C \nabla f.dr = f(B) - f(A)$$

$$= f(0,2,0) - f(0,0,1)$$

$$= 4 + C - C$$

$$= 4.$$

قضیه. عبارات زیر معادلند:

(i) $\int F.dr = 0$ حول هر حلقه بسته در D.

(ii) میدان F در D پایستار است.

مثال. میدان بردلری

$$F = Ax\sin(\pi y)\,\vec{i} + (x^2\cos(\pi y) + Bye^{-z})\,\vec{j} + y^2 e^{-z}\,\vec{k}$$

بازای چه مقادیری از ثابت‌های A, B بقاست؟

انتگرال $\int_C F.dr$ را بازای این A, B در صورتی حساب کنید که C

(a) منحنی $r = \cos t\,i + \sin 2t\,j + \sin^2 t\,k$, $0 \le t \le 2\pi$ باشد،

(b) منحنی فصل مشترک سهمی‌گون $z = x^2 + 4y^2$ و صفحه $z = 3x - 2y$ از $(0,\frac{1}{2},2)$ تا $(2,0,4)$ باشد.

$\int F.dr$ کار به آسانی به ازای F بقا قابل محاسبه است و حتی اگر F ای

مثال زیر طرز استفاده از این امر که

را که می‌خواهیم از آن انتگرال بگیریم، کاملاً بقاعدت را نشان می‌دهد.

مثال. انتگرال

$$I=\oint_C (e^x \sin y + 3y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy$$

را در بیضی $4x^2+y^2=4$ و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت محاسبه کنید

قضیه گرین در صفحه

قضیه گرین می تواند برای توصیف رابطه بین جریان یک سیال تراکم ناپذیر در امتداد و یا روی مرز یک ناحیه در صفحه و روش حرکت آن در داخل ناحیه بکار رود. رابطه ی بین رفتار سیال روی مرز و رفتار آن در داخل ناحیه را با استفاده از مفاهیم واگرایی و تاو توضیح خواهیم داد.

واگرایی میدان سرعت یک سیال با نسبتی که سیال در یک نقطه به داخل ناحیه وارد و یا از آن خارج می شود اندازه گرفته می شود.

تاو نسبت گردش سیال در هر نقطه را نشان می دهد.

قضیه گرین بیان می کند که تحت شرایط مناسب که غالباً در عمل برقرار است، شار یک میدان برداری گذرنده از مرز یک ناحیه در صفحه برابر انتگرال مضاعف واگرایی میدان روی آن ناحیه است.

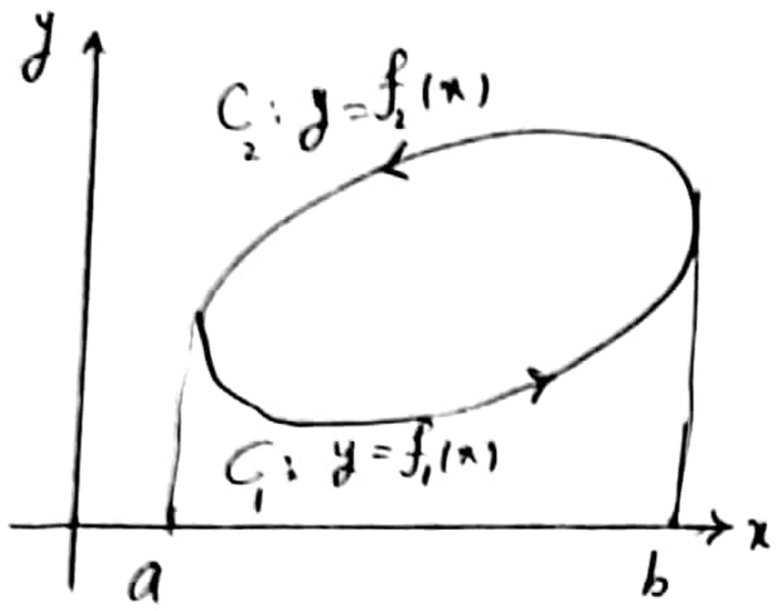
به شکل دیگر، قضیه گرین بیان می کند که گردش میدان در خلاف جهت عقربه های ساعت حول مرز یک ناحیه برابر انتگرال دوگانه تاو روی میدان ناحیه است.

قضیه گرین یکی از مهمترین قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال است. قضیه ای عمیق و اعصاب آور که دارای نتایج بسیاری است. در ریاضیات محض، از نظر اهمیت در رده قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است. در ریاضیات کاربردی تعمیم قضیه گرین در فضای سه بعدی پایه مناسبی برای قضایائی در الکتریسیته، مغناطیس و جریان سیالات است.

میدان را میدان برداری جریان سیال در نظر می گیریم. زیرا تجسم جریان سیالات ساده است. قضیه گرین را می توان برای هر میدان برداری که در شرایط ریاضی خاصی صدق می کند، بکار برد و اعتبار آن به هیچ وجه وابسته به میدان هایی با تعابیر معین فیزیکی نیست.

قضیه گرین. فرض کنید D ناحیه ای در صفحه xy باشد که مرز آن منحنی C است و هر خط به موازات محورها D را حداکثر در دو نقطه قطع کند. همچنین فرض کنید $M(x,y)$ و $N(x,y)$ توابعی بر D و C باشند به طوری که دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. در اینصورت

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\,dx$$



$C_1: y = f_1(x),\ a \le x \le b$

$C_2: y = f_2(x),\ b \ge x \ge a$

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b M(x,y)\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b M(x, f_2(x))\,dx - \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx$$

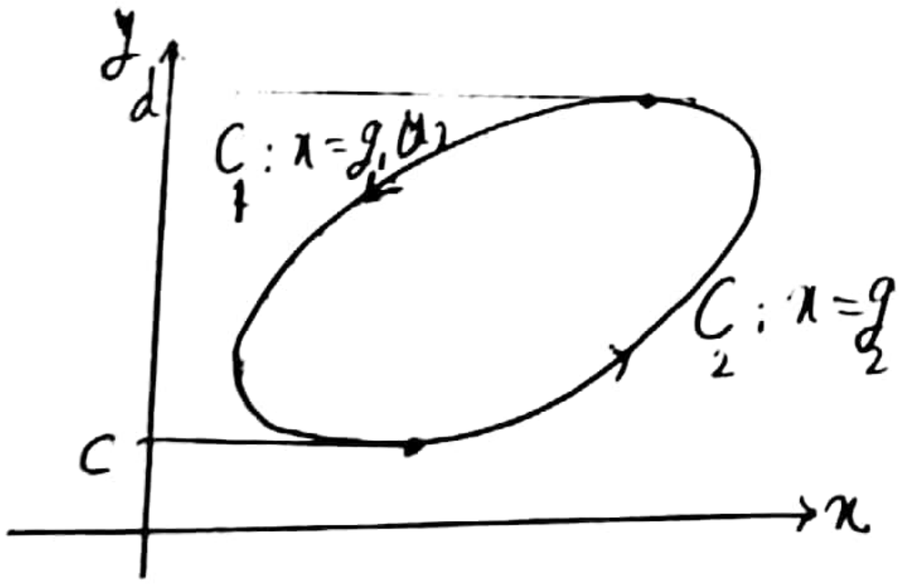
$$= -\int_b^a M(x, f_2(x))\,dx - \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx$$

$$= -\int_{C_2} M\,dx - \int_{C_1} M\,dx$$

$$= -\oint_C M\,dx$$

$$\left(\oint_C M\,dx = \int_{C_1} M\,dx + \int_{C_2} M\,dx = \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, f_2(x))\,dx \right)$$

به طریق مشابه:



$$\oint_C N\,dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy$$

با جمع این دو:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

چگالی شار یک میدان برداری در یک نقطه (واگرایی میدان برداری) را با $\operatorname{div} F$ نمایش می‌دهیم.

تعریف. چگالی شار یا واگرایی میدان برداری $F = Mi + Nj$ در نقطه‌ی (x,y) برابر است با

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j\right) \cdot (Mi + Nj)$$
$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

به طور شهودی آب آب از یک شلنگ کوچک در نقطه‌ی (x_0, y_0) در یک ناحیه جاری می‌شود. خطوط جریان در آن نقطه، واگرا می‌شود و چون آب از یک مستطیل کوچک حول (x_0, y_0) به طرف خارج روان می‌کند، $\operatorname{div} F$ در (x_0, y_0) مثبت خواهد بود. اگر آب به جای خروج از مستطیل به داخل آن روان کند، واگرایی منفی می‌شود.

واگرایی در یک چشمه مثبت و در یک چاه منفی است.

تعریف. چگالی گردش یا تاو میدان برداری $F = Mi + Nj$ در نقطه‌ی (x,y) برابر است با

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j\right) \times (Mi + Nj)$$
$$= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k$$

اگر آب در لایه نازکی از صفحه‌ی xy حرکت کند، آنگاه گردش یا تاو در نقطه‌ی (x_0, y_0) برابر است با اندازه‌گیری سرعت و جهت حرکت یک چرخ پره دار که در نقطه (x_0, y_0) در آب قرار داده شده و محور آن عمود بر صفحه است را نتیجه می‌دهد.

قضیه گرین در صفحه (شکل شار - واگرایی یا قانم)
(دیورژانس)

شار برون سوی میدان $F = Mi + Nj$ گذرنده از منحنی بسته ساده C برابر انتگرال مضاعف $\operatorname{div} F$ روی ناحیه‌ی D است که توسط C محدود شده است.

$$\oint_C F \cdot n \, ds = \oint_C M \, dy - N \, dx = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx \, dy.$$

قضیه گرین در صفحه (شکل گردش - تاو یا چرخش)

گردش میدان $F=Mi+Nj$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول منحنی بسته ساده C برابر انتگرال مضاعف تاو F روی ناحیه D محدود شده توسط C است

$$\oint_C F.T\,ds = \oint_C M\,dx+N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$$

مثال. انتگرال

$$\oint_C xy\,dy - y^2\,dx$$

را که در آن C یک مربع واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=1, y=1$ است محاسبه کنید.

$$\oint_C xy\,dy-y^2\,dx = \iint_D (2y+y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 3y\,dx\,dy = \frac{3}{2}.$$

$N=xy, M=y^2$

مثال. شار برون سوی میدان $F=xi+y^2j$ گذرنده از مربع محدود به $x=\pm1, y=\pm1$ را محاسبه کنید.

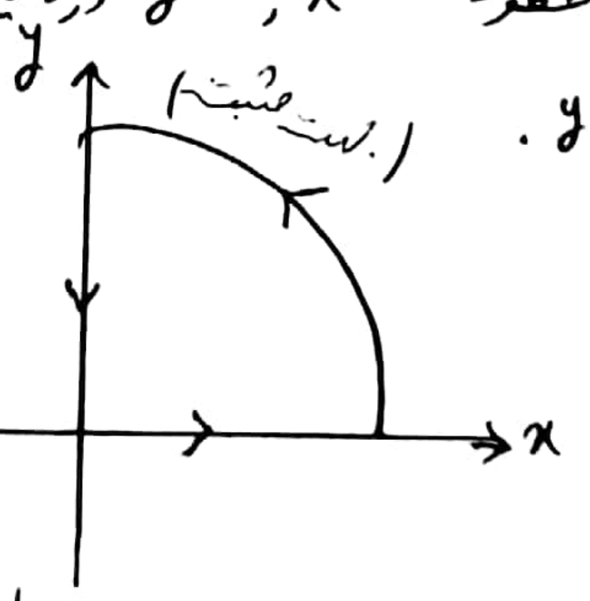
$$\text{شار} = \oint_C F.n\,ds = \oint_C M\,dy - N\,dx = \oint_C x\,dy - y^2\,dx$$

$$= \iint_D (+2y+1)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (1+2y)\,dx\,dy = 4.$$

مثال. مطلوبست محاسبه هریک از انتگرال‌های منحنی الخط زیر

(۲) $\int_C (\sin x + xy)\,dx + (e^y+x^2)\,dy$

C منحنی بسته متشکل از قسمتی از دایره‌ی $x^2+y^2=1$ و خطوط $x=0, y=0$ در ناحیه $x\ge 0, y\ge 0$.



$$\frac{\partial M}{\partial y}=x, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

$$I = \int_C (\sin x + xy)\,dx + (e^y+x^2)\,dy$$

$$= \iint_D x\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

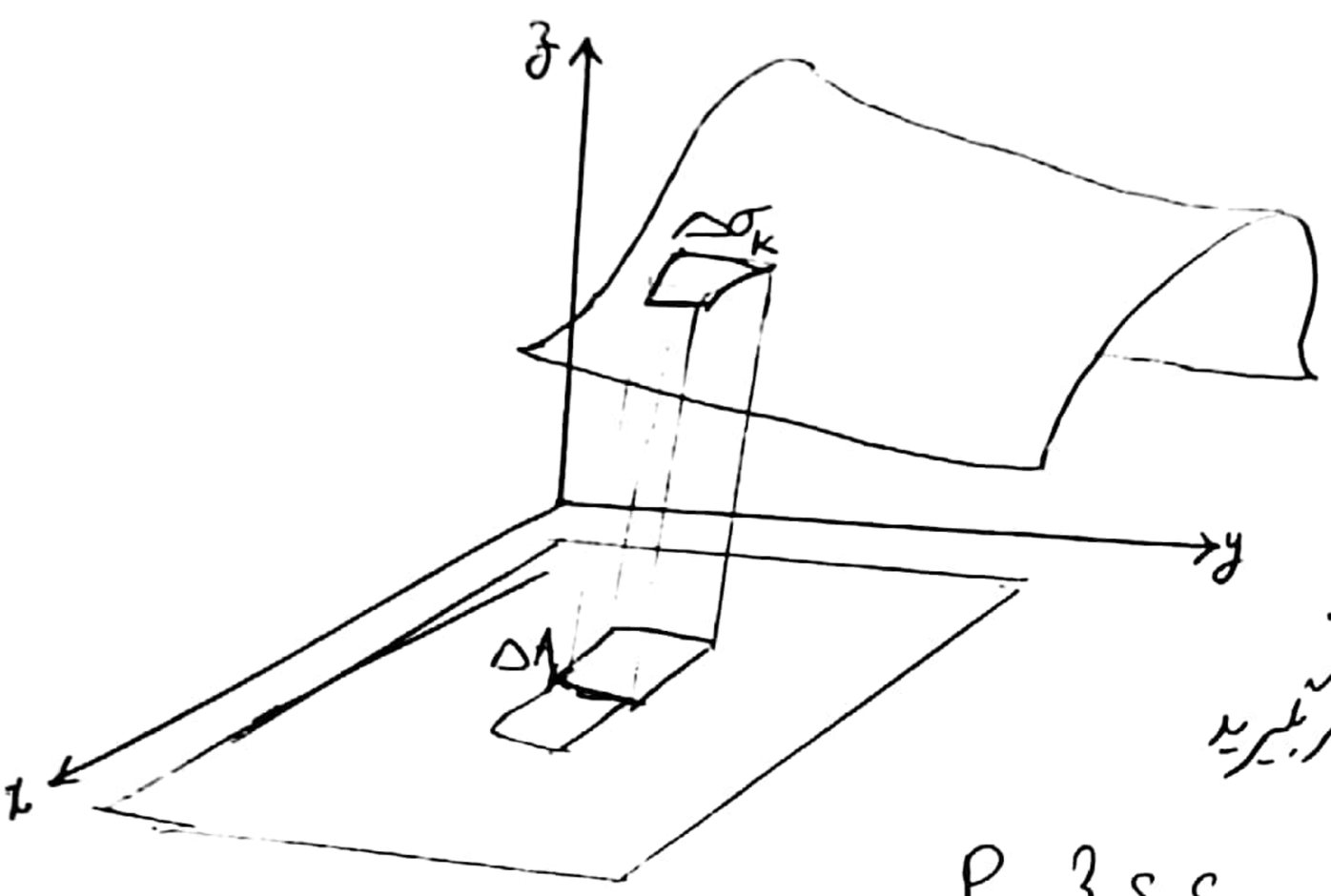
(ii) $\oint \frac{y\,dx - x\,dy}{|x|+|y|}$, C مختی بسته $|x|+|y|=1$ است.

(iii) $\int \left(\frac{x}{1+x^4} + 2xy\right)dx + (y^2 - x^2)\,dy$, C قسمتی از دایره $x^2+y^2=2$ در یک ربع اول صفحه از نقطه $A(0,\sqrt{2})$ به نقطه $B(\sqrt{2},0)$

مساحت سطح و انتگرال کمی رویه ای

با نحوه انتگرال گیری روی یک ناحیه در صفحه آشنا هستیم. در این بخش به معرفی روش انتگرال گیری از یک تابع روی یک رویه ی خمیده خواهیم پرداخت. روش محاسبه این انتگرال ها که انتگرال های رویه ای نامیده می شود این است که انتگرال را به صورت یک انتگرال مضاعف روی یک ناحیه در صفحه ی تصویر رویه ها از توسیع می کنیم.

تعریف انتگرال سطح



فرض کنید S سطحی کراندار در فضای $\mathbb{R}^3$ و $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار تعریف شده بر S باشد که دارای مشتقات جزئی اول پیوسته است.

افراز P از S را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$P = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

که در آن

$\Delta\sigma_i =$ مساحت S_i

نقطه دلخواه (x_i, y_i, z_i) را از هر قسمت انتخاب و مجموع زیر را تشکیل دهید

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i$$

هرگاه حد S_n وقتی $n \to \infty$، مستقل از نحوه انتخاب نقاط (x_i, y_i, z_i)، موجود باشد آنگاه f بر سطح S انتگرال پذیر بوده و مقدار حد فوق را با $\iint_S f\,d\sigma$ نمایش می دهند.

هرگاه S سطحی اندازه پذیر از مساحت پذیر باشد و $f: S \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه می توان نشان داد که f بر S انتگرال پذیر است.

خواص انتگرال سطح

1) $\forall f,g: S \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\iint_S (\alpha f \pm \beta g)\,d\sigma = \alpha \iint_S f\,d\sigma \pm \beta \iint_S g\,d\sigma$
انتگرال پذیر

2) $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 =$ خم اکثر نقاط مرزی , $\forall f: S \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\iint_S f\,d\sigma = \iint_{S_1} f\,d\sigma + \iint_{S_2} f\,d\sigma$$

3) $f \equiv 1$, $\iint_S f\,d\sigma = \iint_S d\sigma = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = \sigma =$ مساحت سطح S

محاسبه انتگرال سطح

از ناحیه R سایه رویه‌ی که توسط معادله $f(x,y,z) = C$ تعریف می‌شود باشد و g یک تابع پیوسته که در هر نقطه‌ی S تعریف شده است آنگاه انتگرال g روی S برابر است با

$$\iint_S g\,d\sigma = \iint_R g(x,y,z)\,\frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot P|}\,dA$$

(S: رویه‌ای / فرم دیفرانسیلی انتگرال سطح) ($\frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot P|}$: دیفرانسیل صفت رویه (dσ))

که در آن P بردار یکه قائم بر R و $\nabla f \cdot P \neq 0$ است.

انتگرال‌های رویه‌ای دارای خواصی مشابه انتگرال‌های مضاعف هستند: به عنوان مثال

(خاصیت جمع پذیری) If $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $S_i \cap S_j = \Phi$ $(i \neq j)$

then $\iint_S g\,d\sigma = \iint_{S_1} g\,d\sigma + \cdots + \iint_{S_k} g\,d\sigma$

لذا انتگرال یک تابع روی سطح یک مکعب برابر حاصل جمع انتگرال‌ها روی شش وجه آن است.

مثال 1. انتگرال تابع $g(x,y,z)=xyz$ بر رویه مکعبی که در $\frac{1}{8}$ اول توسط صفحات $x=1$ ، $y=1$ ، $z=1$ بریده شده است را حساب کنید.

مثال 2. انتگرال های زیر را حساب کنید.

(i) $\iint_S (x+y)\,d\sigma$, S قسمتی از صفحه $2x+y+z=2$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا

(ii) $\iint_S xy\,d\sigma$, S قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=1$ در نیمه $x\geq 0$

(iii) $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma$, S قسمتی از استوانه $x^2+y^2=1$ بین صفحات $z=2$, $z=1$

مثال 3. مساحت هریک از نواحی زیر را بیابید.

(i) مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=1$, $z=2$.

(ii) مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=1$ درون استوانه $x^2+y^2=y$

مثال 4. استوانه $x^2+y^2=2ay$ کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ را قطع می کند.

(الف) سطح آن قسمت از کره که درون استوانه است را بیابید

(ب) سطح آن قسمت از استوانه که درون کره است را بیابید.

سطح هموار

سطح S در فضا یک سطح هموار است هرگاه در هر نقطه از این سطح بتوان به مفهوم صفحه‌ی مماس بر سطح و در نتیجه بردار قائم بر سطح را داشته باشیم.

سطح جهت پذیر

فرض کنید S سطح هموار در فضای $\mathbb{R}^3$ بوده و برای هر نقطه $P \in S$ بردار $\vec{n}(P)$ بردار یکه قائم بر سطح S در نقطه P باشد. اگر بتوان تابع برداری $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را طوری تعریف کرد که همواره پیوسته باشد آنگاه سطح هموار S را جهت پذیر می‌نامیم. کره و سایر رویه‌های هموار در فضا (رویه‌هایی که ...) جهت پذیر هستند (به زودی خواهید دید) اما نوار مویبوس شکلی است که ...

فرض کنید S یک سطح هموار جهت پذیر در فضای $\mathbb{R}^3$ بوده و $\vec{n}$ بردار یکه قائم در نقاط مختلف این سطح باشد، $F = Mi + Nj + Pk$ میدان برداری تعریف شده بر ناحیه‌ای از فضا شامل سطح S باشد. در اینصورت شار میدان برداری F گذرنده از رویه جهت پذیر S در جهت n توسط رابطه زیر بیان می‌شود

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\, d\sigma$$

اگر $S = \bigcup_1^k S_j$ سطحی قطعه قطعه هموار و جهت پذیر باشد آنگاه

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\, d\sigma = \sum_1^k \iint_{S_j} \vec{F}.\vec{n}\, d\sigma$$

تعریف فوق مشابه تعریف شار در بحث میدان F گذرنده از منحنی صاف C است. اگر F میدان سرعت یک جریان سیال سه بعدی باشد، شار F گذرنده از S، برابر است با مقدار سیال در یک واحد زمان که از جهت انتخاب شده از رویه می‌گذرد.

اگر S بخشی از رویه‌ی تراز $g(x,y,z) = C$ باشد آنگاه $n = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|}$ که بستگی به جهت انتخاب شده دارد.

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\, d\sigma = \iint_S \left(\vec{F}.\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right) \frac{|\nabla g|}{|\nabla g.n|}\, dA = \iint_S \vec{F}.\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g.n|}\, dA$$

مثال. شار برون سوی $\vec{F} = yz\vec{i} + z^2\vec{k}$ گذرنده از رویه S که از استوانه $y^2 + z^2 = 1$ و $z \geq 0$ و صفحات $x = 0$ و $x = 1$ بریده شده است را بیابید.

مثال 2. مطلوبست تعیین شار در هریک از حالات زیر

(الف) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ، S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ بالای صفحه xy و $\vec{n}$ سطح خارج کره

(ب) $\vec{F} = z^3\vec{i} + x^3\vec{j} + y^3\vec{k}$ ، S سطح بسته متشکل از سهمی گون $z = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 2$ ، $\vec{n}$ به سمت خارج سطح

مثال 3. کره $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ به وسیله صفحه $z = 3$ بریده شده است. بخش کوچکتر آن جسمی را تشکیل داده که سطح کل آن را S می نامیم. انتگرال $\iint F \cdot n \, d\sigma$ را در صورتی حساب کنید که $\vec{F} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + \vec{k}$ ، n یکانی قائم بیرونی بر سطح باشد که

قضیه دیورژانس (گاوس) در فضای سه بعدی

شکل دیورژانس (یا واگرایی) قضیه گرین در صفحه بیان می‌کند که شار ناب خروجی یک میدان برداری گذرنده از خم بسته ساده را می‌توان با انتگرال‌گیری از دیورژانس حول ناحیه محدود شده توسط خم محاسبه نمود. قضیه متناظر در فضای سه بعدی، که قضیه دیورژانس (گاوس) نامیده می‌شود، بیان می‌کند که شار ناب خروجی از یک میدان برداری گذرنده از یک رویه‌ی بسته در فضا را می‌توان با انتگرال‌گیری از دیورژانس روی ناحیه محدود به رویه محاسبه نمود.

دیورژانس سه بعدی

دیورژانس میدان برداری $F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + P(x,y,z)k$ تابع عددی زیر است

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

دیورژانس F در فضای سه بعدی دارای همان تعبیر فیزیکی در فضای دو بعدی است. اگر F میدان سرعت جریان یک سیال باشد، مقدار $\operatorname{div} F$ در نقطه‌ی (x,y,z) نسبت سیالی است که از نقطه‌ی (x,y,z) می‌گذرد. دیورژانس، شار در واحد حجم یا چگالی حجم در یک نقطه است.

قضیه دیورژانس

فرض کنید D یک قلمرو سه بعدی منتظم باشد که مرزش S یک سطح بسته جهت‌دار با میدان قائم یکه n است که به خارج اشاره دارد. هرگاه F یک میدان برداری هموار تعریف شده بر D باشد آنگاه

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dv = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

قضیه فوق برای یک رده کلی از قلمروها در $\mathbb{R}^3$ که به سطوح بسته قطعه قطعه هموار کراندارند برقرار است.

قلمرو D را منتظم گوییم هرگاه اجتماع تعداد متناهی زیر قلمرو رویهم نیفتاده باشد که هر یک x-ساده، y-ساده و z-ساده باشد.

قلمرو سه بعدی D، x-ساده است اگر به سطح قطعه قطعه هموار S محدود باشد و هر خط راست موازی محور xها و مار بر یک نقطه‌ی درونی D، سطح S را درست در دو نقطه قطع کند.

مثال. در ستی قضیه دیورژانس (استروگرادسکی) را برای میدان برداری $F=xi+yj+zk$ بر رویه ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ بررسی کنید.

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

$$\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}=\frac{2xi+2yj+2zk}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{xi+yj+zk}{a}$$

$$\vec{F}.\vec{n}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a}=\frac{a^2}{a}=a$$

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iint_S a\,d\sigma=a\iint_S d\sigma=a(4\pi a^2)=4\pi a^3.$$

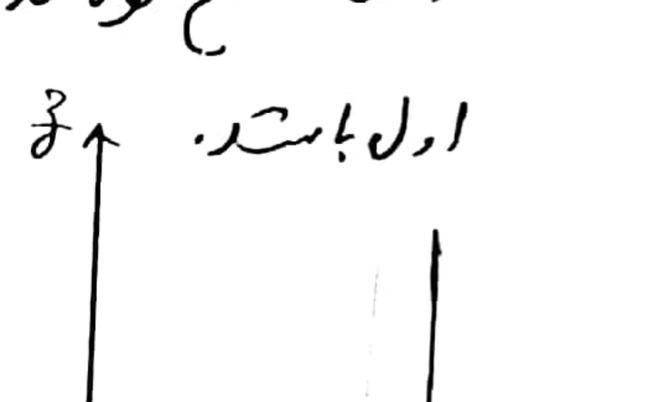
از طرفی

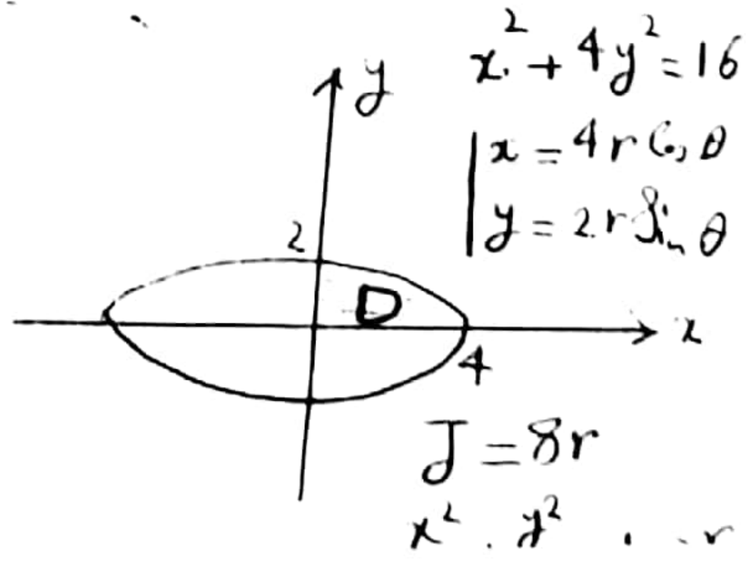
$$divF=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=3$$

$$\iiint_D divF\,dv=3\iiint_D dv=3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)=4\pi a^3.$$

مثال. انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma$ را حساب کنید در صورتی که $F=2xzi+yj-z^2k$ و S سطح کوه محدود به $x=0$، $z=0$، $z=y$ و استوانه ی $x^2+4y^2=16$ در ربع اول باشد.

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iiint_D divF\,dv$$





$$\iiint_D divF\,dv=\int_0^4\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}}\int_0^y (2z+1-2z)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 2r\sin\theta\,8r\,dr\,d\theta$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\times 1\times 1$$

مثال: میدان برون سوی

$$\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\rho^3}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

گذرنده از ناحیه $0 < a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$ را بیابید.

مثال 2. فرض کنید S سطح قلمرو منتظم دلخواه D در فضای سه بعدی باشد که مبدأ را به عنوان یک نقطه دلخواه دروني دارد. انتگرال $\iint_S F.n\,ds$ را در صورتی حساب کنید که $F(r) = \frac{mr}{|r|^3}$ و n قائم رو به خارج یکه بر S باشد.

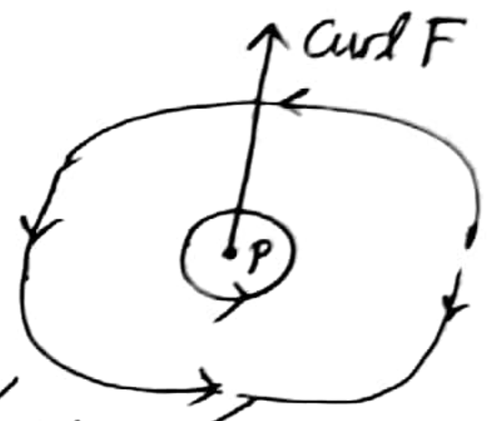
قضیه استوکس

چگالی گردش یا تاو میدان برداری دو بعدی $\vec{F}(x,y)=M(x,y)\vec{i}+N(x,y)\vec{j}$ در نقطه (x,y) توسط کمیت اسکالر $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$ بیان می‌شود.

$$\left(\begin{array}{ll} \oint_C F\cdot n\,ds=\iint_R \nabla\cdot F\,dA & \text{شکل عمودی قضیه گرین} \\ \oint_C F\cdot dr=\iint_R \nabla\times F\cdot k\,dA & \text{شکل مماسی قضیه گرین} \end{array}\right)$$

در سه بعدی، گردش حول نقطه P در صفحه با یک بردار بیان می‌گردد. این بردار بر صفحه گردش عمود بوده، و در جهت ساعتگرد با گردش سیال واقع است. طول این بردار نسبت گردش سیال را که غالباً با تغییر نقطه P تغییر می‌کند، بیشینه می‌دهد. مشخص شده است که برداری با بزرگترین گردش در همسایگی با میدان برداری $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ برابر است با:

$$\text{تاو } F=\operatorname{curl}F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$



قضیه استوکس بیان می‌کند که تحت شرایطی که غالباً در عمل برقرار است، گردش میدان برداری حول مرز رویه جهت‌دار در فضا در خلاف جهت عقربه‌های ساعت نسبت به میدان برداری یکه n بر رویه برابر انتگرال مولفه قائم تاو میدان برداری بر رویه است.

قضیه استوکس

فرض کنید S یک سطح جهت‌دار قطعه قطعه هموار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد که دارای میدان قائم یکه n است و مرزش C از یک یا چند خم بسته قطعه قطعه هموار با جهت ناشی از آنکه تشکیل شده است. هرگاه F یک میدان برداری هموار تعریف شده بر یک مجموعه باز شامل S باشد آنگاه

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \operatorname{curl}F\cdot n\,d\sigma \qquad (*)$$

انتگرال تاو — گردش در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

از رابطه‌ی (*) می‌توان نتیجه گرفت که اگر دو رویه‌ی متمایز جهتدار S_1 و S_2 دارای مرز یکسان C باشند آنگاه انتگرال دی تاو آنها یکسان است.

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} F.n_1\,d\sigma = \iint_{S_2} \operatorname{curl} F.n_2\,d\sigma$$

اگر C یک خم در صفحه xy بوده که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت جهتدار شده باشد و R ناحیه‌ای در صفحه‌ی xy محدود به C باشد آنگاه $d\sigma = dx\,dy$ و

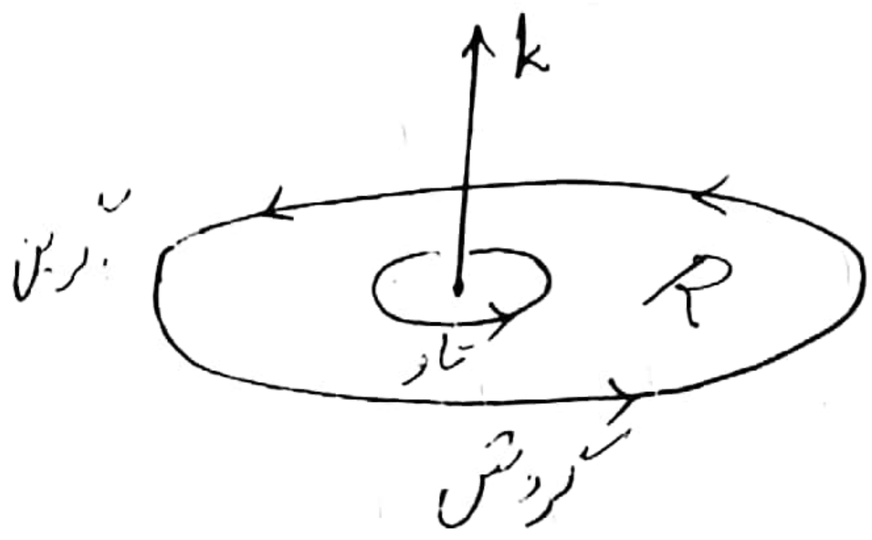
$$(\nabla \times F).n = (\nabla \times F).k = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

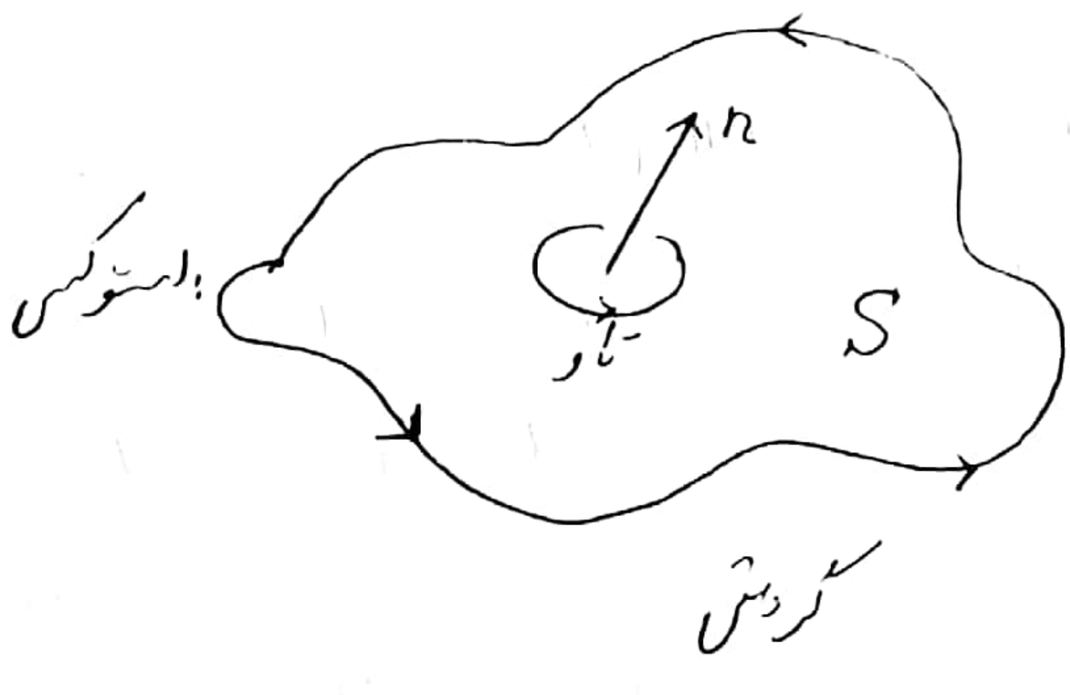
تحت این شرایط قضیه استوکس به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\oint_C F.dr = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

که شکل معادله‌ی گردش ـ تاو قضیه گرین است. بالعکس، با عکس قدم‌های پیموده شده می‌توان شکل گردش ـ تاو قضیه گرین برای میدان‌های دوبعدی را بر حسب نماد دل به صورت زیر نوشت

$$\oint_C F.dr = \iint_R \nabla \times F.k\,dA$$





مثال ۱. درستی قضیه استوکس برای نیم کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ ، $z\geq 0$ در صورتی که $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ را بررسی کنید.

مثال 2. فرض کنید S استوانه $x^2+y^2=a^2, 0\leq z\leq h$ همراه با سرش $x^2+y^2\leq a^2, z=h$ باشد و $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}+x^2\vec{k}$. مطلوبست محاسبه $\iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\, d\sigma$.

مثال 3. با استفاده از قضیه استوکس، $\int F\cdot dr$ را با فرض $\vec{F}=xz\vec{i}+xy\vec{j}+3xz\vec{k}$ حساب کنید در صورتی که C مرز بخشی از صفحه $2x+y+z=2$ در یک هشتم اول پیموده شده در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت وقتی از بالا مشاهده می‌شود، باشد.