



تمرینات درس جبرخطی عددی- رشته ریاضیات و کاربردها

(۱) دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ -10x_1 + 10^5x_2 &= 10^5, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. جواب این دستگاه را با روش حذفی گاوس در حساب ممیز شناور چهار رقمی و با استفاده از راهکارهای زیر به دست آورید:

(الف) محورگیری جزئی؛

(ب) محورگیری جزئی مقیاس شده؛

(پ) محورگیری کامل؛

(ت) جواب دقیق دستگاه را به دست آورده و با جواب‌های حاصل از قسمت‌های (الف)-(پ) مقایسه کنید.

(۲) فرض کنید A ماتریسی ناتکین و $A^{(k)}$ ماتریس حاصل از به کارگیری روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی برای حل دستگاه $Ax = b$ در گام k ام باشد. همچنین، فرض کنید

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(k)} = (a_{rs}^{(k)}), \quad a_k = \max_{r,s} |a_{rs}^{(k)}|.$$

نشان دهید:

(الف) به ازای ماتریس دلخواه A داریم

$$a_k \leq 2^k a_0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

(ب) به ازای ماتریس سه قطری A داریم

$$a_k \leq 2a_0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

(۳) ماتریس A و بردار b را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

(الف) توضیح دهید چرا ماتریس A دارای تجزیه LU نیست؛

(ب) با استفاده از محورگیری جزئی و ماتریس جایگشت مناسب P ، تجزیه LU برای ماتریس PA بیابید؛

(پ) با استفاده از ماتریس‌های P ، L و U جواب دستگاه $Ax = b$ را به دست آورید.

(۴) تجزیه چولسکی ماتریس خیام-پاسکال مرتبه ۴، یعنی،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix},$$

را به دست آورید.

(۵) اگر $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ یک ماتریس اکیداً معین مثبت باشد، نشان دهید همه زیرماتریس‌های اصلی پیشروی مرتبه k آن ناکین هستند. در مورد درستی یا نادرستی عکس مطلب فوق بحث کنید.

(۶) فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس معین مثبت اکید باشد. نشان دهید

$$|a_{ij}| < \frac{a_{ii} + a_{jj}}{2} \quad (\text{الف})$$

(ب) بزرگترین درایه A (از لحاظ قدرمطلق) روی قطر اصلی قرار دارد.

(۷) در هر یک از گزاره‌های زیر استفاده از چه نرمی را پیشنهاد می‌کنید.

(الف) محاسبه مسافتی که از درب ورودی دانشگاه تا کتابخانه مرکزی باید طی کرد.

(ب) محاسبه ارتفاع یک در به طوری که هر فرد زیر ۱/۶ متر بتواند بدون خم شدن از آن رد شود.

(پ) محاسبه اندازه باقی مانده پس از برازش داده‌ها با یک خط مستقیم در تقریب کمترین مربعات

(ت) اطمینان از اینکه همه مولفه‌های یک بردار خطا کمتر از 10^{-3} باشند.

(ث) محاسبه تعداد خانه‌هایی که یک رخ باید برای رسیدن به یک موقعیت خاص در صفحه شطرنج انجام دهد (ممکن است بیش از یک حرکت نیاز باشد).

(۸) نرم‌های برداری $\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ و نرم‌های ماتریسی $\|A\|_1$ ، $\|A\|_\infty$ و $\|A\|_F$ را برای بردار و ماتریس زیر به دست آورید. (۲۰ نمره)

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix},$$

(۹) فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. نشان دهید

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty \quad (\text{الف})$$

$$\|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \quad (\text{ب})$$

(۱۰) نشان دهید ماتریس L روش تجزیه LU برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$L = G_1^{-1} G_2^{-1} \dots G_{n-1}^{-1},$$

که در آن $G_i = I + g_i e_i^T$ ، ماتریس‌های تبدیل گاوسی، I ماتریس همانی، e_i ، i امین بردار یکه استاندارد است و

$$g_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ \circ \\ (g_i)_{i+1} \\ \vdots \\ (g_i)_n \end{pmatrix}, \quad (g_i)_j = -\frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}.$$

(۱۱) ماتریس A و معکوس آن به شکل

$$A = \begin{pmatrix} -0.4 & 1 & -0.8 \\ 1/2 & -2 & 1/4 \\ -0.6 & 1 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید.

الف) $\kappa_1(A)$ را به دست آورید.

ب) فرض کنید $Ax = b$ و $(A + E)\hat{x} = b$ که در آن $\|E\|_1 \leq 0.01$. کرانی برای تفاضل نسبی بین جواب‌های این دو دستگاه تعیین کنید.

(۱۲) الف) روش ژاکوبی برای حل دستگاه $AX = b$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

را بیان کنید.

ب) نشان دهید

$$u_k = (\sin(k\pi h), \sin(2k\pi h), \dots, \sin(nk\pi h))^T, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

که در آن $h = 1/(n+1)$ ، بردارهای ویژه ماتریس تکرار T_j هستند.

پ) نشان دهید روش به‌زای هر تقریب اولیه $x^{(0)}$ ، همگراست.

(۱۳) جواب تقریبی دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 17, \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13, \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18, \end{aligned}$$

را با روش تکراری گاوس-سایدل و با حدس اولیه $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ به دست آورید (دو تکرار انجام دهید).

(۱۴) نشان دهید روش تکراری گاوس-سایدل در مورد دستگاه خطی

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5, \end{aligned}$$

به ازای هر بردار اولیه $x^{(0)}$ همگراست درحالی که روش تکراری ژاکوبی واگراست.

(۱۵) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4/5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ -x_2 + 2x_3 &= -5/5, \end{aligned}$$

بهترین انتخاب w برای پیاده سازی روش SOR را بیابید.

(۱۶) نشان دهید اگر ماتریس A با تبدیل مشابه $P^{-1}AP$ قطری شود و B یک ماتریس دلخواه باشد آنگاه مقادیر ویژه $A+B$ در اجتماع دایره های

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_k| \leq \kappa_\infty(P) \|B\|_\infty\},$$

قرار دارند که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A بوده و $\kappa_\infty(P)$ عدد حالت ماتریس P است.

(۱۷) نشان دهید همه مقادیر ویژه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

مثبت هستند.

(۱۸) (الف) نشان دهید ماتریس انعکاس هاوس-هولدر $H = I - 2ww^T$ که در آن $\|w\| = 1$ ، ماتریسی متقارن و متعامد است.

(ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس H را بیابید.

(۱۹) جواب مساله کمترین مربعات برای دستگاه

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

را به دست آورید.

(۲۰) تجزیه QR ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

را با استفاده از الگوریتم متعامدسازی گرام-اشمیت به دست آورید.

(۲۱) یک تجزیه مقدار تکین برای ماتریس زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

«موفق باشید»