



تمرینات درس معادلات دیفرانسیل جزئی- رشته ریاضیات و کاربردها

(۱) (الف) فرض کنید تابع f در یک دوره تناوب به صورت $0 < x < 1$, $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ تعریف شود. آیا تابع f دارای سری فوریه است؟ چرا؟

(ب) در بسط فوریه $0 < x < \pi$, $f(x) = xe^{-x} \sin x$, مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ را بیابید.

(۲) سری فوریه توابع زیر را بیابید.

(الف) $y = x - [x]$

(ب) $y = x + \sin x, \quad -\pi < x < \pi$

(پ) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{4}, & -\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi(\pi-x)}{4}, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4}, \end{cases}$ و $f(x+\pi) = f(x)$

(۳) با استفاده از بسط سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ -1, & 1 < x < 3, \end{cases}$ مقدار سری فوریه را در نقاط $x = 1, x = \frac{1}{4}, x = 912/5$ و $x = -232$ بیابید.

(۴) فرض کنید

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx &= \left[\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx &= e^{-in\pi} - e^{in\pi}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = \frac{i}{n} \left[e^{-inx} \Big|_0^{\pi} - e^{inx} \Big|_{-\pi}^0 \right], \end{aligned}$$

که در آن n یک عدد صحیح است. مطلوبست محاسبه هر یک از موارد زیر

(الف) سری فوریه حقیقی تابع f .

(ب) سری فوریه مختلط تابع g .

(پ) نمایش حقیقی سری فوریه تابع g .

(۵) ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{4}, & x = -\pi, 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید به ازای هر $-\pi < x < \pi$ داریم

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n},$$

و نتیجه بگیرید اگر $0 < x < \pi$ ، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{6}.$$

(۶) جواب معادله انتگرال نوع اول زیر را بیابید.

$$\int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega x) d\omega = \frac{e^{-x} \sin x}{x}, \quad x > 0.$$

(۷) تبدیل فوریه توابع زیر را بیابید.

(الف) $f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$ ؛

(ب) $f(x) = e^{-ax^2}$ ؛

(پ) $f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$ ؛

(ت) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ ؛

(ث) $\phi(x) = 1 + \int_0^{\infty} \phi(x-u) du, \quad -1 < x < 1$.

(۸) تبدیل فوریه جواب معادله دیفرانسیل معمولی

$$\pi y'' - \pi y = \frac{-1}{x^2 + 1},$$

را بیابید.

(۹) فرض کنید $F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n)$ تبدیل فوریه تابع f باشد که در آن δ ، بیانگر دلتای کرونگر است.

(الف) تبدیل فوریه معکوس تابع f را به دست آورید.

(ب) اگر

$$c_0 = \pi, \quad c_n = \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{n}, \quad n \neq 0,$$

آنگاه نمودار تابع f را رسم کنید.

(۱۰) تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ به صورت $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}$ است. تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ را به دست آورید.

(۱۱) با استفاده از روش جداسازی متغیرها جواب معادله دیفرانسیل جزئی

$$u_t = 3(u_{xx} + 5u), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

با شرایط مرزی

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

و شرایط اولیه

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

را بیابید.

(۱۲) تغییر مکان اولیه یک تار نامحدود دو طرفه عبارت است از $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و $x^2 < \infty$. سرعت اولیه مناسبی برای تار پیشنهاد کنید در صورتی که بخواهیم حرکتش منحصر به موجی باشد که به راست حرکت می‌کند.

(۱۳) اگر $u(x, t)$ جواب مساله

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

باشد آن‌گاه مقدار $u(\frac{1}{4}, 3)$ را به دست آورید.

(۱۴) (الف) جواب مساله دیریکله زیر را به دست آورید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = f(x).$$

(ب) نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

(۱۵) جواب معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0,$$

با شرایط مرزی

$$u(1, \theta) = 0,$$

$$u(2, \theta) = f(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}, \quad |\theta| \leq \pi,$$

که در آن f یک تابع 2π -متناوب است، را در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

۱۶) جواب معادله لاپلاس زیر را با استفاده از شرایط مرزی داده شده به دست آورید.

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 < a < \rho < b,$$

$$u(a, \phi) = 1 + \cos \phi,$$

$$u(b, \phi) = \cos(2\phi).$$

۱۷) جواب معادله دیفرانسیل جزئی زیر را بیابید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 1,$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = xe^{-|x|}.$$

«موفق باشید»