به نام خدا

تمرینات درس جبرخطی عددی-رشته علوم کامپیوتر

سری اول-روش‌های مستقیم حل دستگاه معادلات خطی

مدرّس: حسینی مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۱۲/۲۶

---

۱) دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ -10x_1 + 10^5 x_2 &= 10^5, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. جواب این دستگاه را با GEM در حساب ممیز شناور چهار رقمی و با استفاده از راهکارهای زیر به‌دست آورید:

(الف) محورگیری جزئی؛

(ب) محورگیری جزئی مقیاس شده؛

(پ) محورگیری کامل؛

(ت) جواب دقیق دستگاه را به‌دست آورده و با جواب‌های حاصل از قسمت‌های (الف)-(پ) مقایسه کنید.

۲) فرض کنید A ماتریسی ناتکین و $A^{(k)}$ ماتریس حاصل از به‌کارگیری GEM با محورگیری جزئی برای حل دستگاه $Ax = b$ در گام kام باشد. همچنین، فرض کنید

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(k)} = \left(a_{rs}^{(k)}\right), \quad a_k = \max_{r,\, s} \left|a_{rs}^{(k)}\right|.$$

نشان دهید:

(الف) به ازای ماتریس دلخواه A داریم

$$a_k \leq 2^k a_0, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

(ب) به ازای ماتریس سه قطری A داریم

$$a_k \leq 2 a_0, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

۳) فرض کنید هدف به‌دست آوردن تجزیه‌ای به شکل

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ d_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & c_1 & & & \\ & e_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & e_n \end{bmatrix},$$

برای ماتریس سه قطری

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

باشد.

(الف) یک رابطه بازگشتی به‌دست آورید که مقادیر d_k و e_k را بر حسب a_k، b_k و c_k تعیین کند.

(ب) تحت چه شرطی روی ماتریس A، این تجزیه همواره وجود دارد؟

(پ) فرمول‌هایی برای حل دستگاه $Ax = b$ را طوری مشخص کنید که تعداد اعمال حسابی مورد نیاز از مرتبه $\mathcal{O}(n)$ باشد.

۴) ماتریس A و بردار b را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

(الف) توضیح دهید چرا ماتریس A دارای تجزیه LU نیست؛

(ب) با استفاده از محورگیری جزئی و ماتریس جایگشت مناسب P، تجزیه LU برای ماتریس PA بیابید؛

(پ) با استفاده از ماتریس‌های P، L و U جواب دستگاه $Ax = b$ را به‌دست آورید.

۵) تجزیه چولسکی ماتریس خیام-پاسکال مرتبه ۴، یعنی،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix},$$

را به‌دست آورید.

۶) اگر $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ یک ماتریس اکیداً معین مثبت باشد، نشان دهید همه زیرماتریس‌های اصلی پیشروی مرتبه k آن ناتکین هستند. در مورد درستی یا نادرستی عکس مطلب فوق بحث کنید.

«موفق باشید»