

به نام خدا



تمرینات درس ریاضیات عمومی ۱ - رشته مهندسی برق
سری چهارم: انتگرال

مدرس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۰۹/۲۶

(۱) فرض کنید تابع f به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

تعریف شده باشد. حاصل انتگرال $\int_0^1 f(x) dx$ را در صورت وجود بیابید.

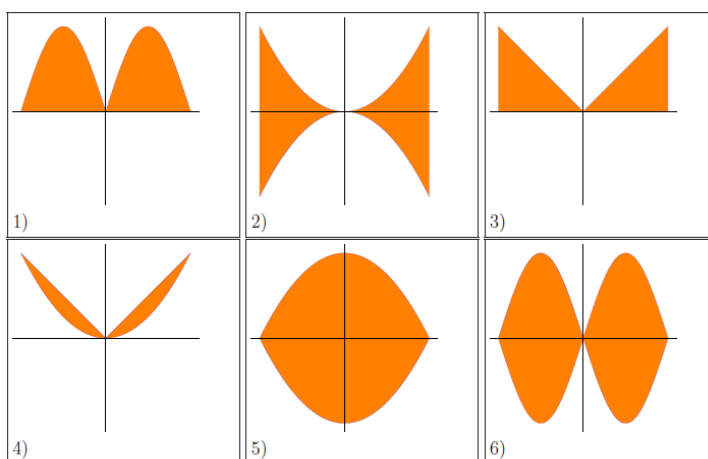
(۲) حدود زیر را محاسبه کنید.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^5 + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^5 \right),$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan x} dx}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin x} dx},$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \cdots + \frac{n}{2n} \right),$

(۳) در جاهای خالی، ناحیه متناظر با انتگرال‌های داده شده را مشخص کنید.



انتگرال	۱ - ۶	انتگرال	۱ - ۶
$\int_{-1}^1 x dx$		$\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$	
$\int_{-1}^1 \sin(\pi x) dx$		$\int_{-1}^1 2x^2 dx$	
$\int_{-1}^1 \sin(\pi x) - (-\sin(\pi x)) dx$		$\int_{-1}^1 (x - x^2) dx$	

۴) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx, \quad m \in \mathbb{R}, \quad \text{(ii)} \int \tan^{-1} x dx, \\
 & \text{(iii)} \int \frac{x^2 + 2}{x^2 - x} dx, \quad \text{(iv)} \int \frac{x^2 + 2}{x^5 + x^2 + x} dx, \quad \text{(v)} \int \frac{dx}{x(x-1)^2}, \\
 & \text{(vi)} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx, \quad \text{(vii)} \int_0^\pi \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} dx, \quad \text{(viii)} \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx, \\
 & \text{(ix)} \int_{-1}^2 \lfloor 2x \rfloor dx, \quad \text{(x)} \int_0^n \lfloor t^2 \rfloor dt, \quad \text{(xi)} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \operatorname{sign}(x-1) dx.
 \end{aligned}$$

۵) آیا تابع $F(x) = \int_0^{2x-x^2} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$ دارای اکسترمم نسبی است؟ جواب خود را توجیه کنید.

۶) فرض کنید تابع f همه جا تعریف شده باشد و f'' تابعی پیوسته باشد و $f(0) = f(1)$ و $f'(1) = 3$. مقدار انتگرال $\int_0^1 x f''(x) dx$ را بیابید.

«موفق باشید»