



به نام خدا

تمرینات درس حل عددی معادلات دیفرانسیل- رشته ریاضیات و کاربردها سری اول- روش های تک گامی

مدرس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۰۲/۱۱

(۱) نتایج حاصل از به کارگیری روش اویلر برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(t) = t + 2y(t) + ty(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ y(0) = 2,$$

در جدول زیر آمده است.

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t_i	۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۷
y_i	۲	A	B	۲/۱۲۳۳	۲/۱۶۶۷	۲/۲۱۱۳	۲/۲۵۷۲	C

مقادیر A، B و C را تعیین کنید.

(۲) دستگاه معادلات مرتبه دو

$$x''(t) = \frac{-cx(t)}{r(t)^3}, \quad y''(t) = \frac{-cy(t)}{r(t)^3}, \quad z''(t) = \frac{-cz(t)}{r(t)^3},$$

که در آن c ثابت، t نمایش زمان و $r(t) = [x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2]^{\frac{1}{2}}$ ، در مطالعه کشش یک جرم با جرم دیگری به دست می آید. این دستگاه را به یک دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید.

(۳) روش اویلر ضمنی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

$$y_1'(t) = y_2(t), \quad y_1(0) = y_{1,0}, \\ y_2'(t) = -y_1(t) - y_2(t), \quad y_2(0) = y_{2,0},$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید به ازای هر طول گام مثبت و ثابت h جواب حاصل از روش، یعنی، $\begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{pmatrix}$ ،

همگرا به صفر است هرگاه $n \rightarrow \infty$. آیا نتیجه مشابهی برای روش اویلر برقرار است؟ چرا؟

(۴) روش عددی

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1}),$$

برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(t) = f(t, y), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ y(t_0) = y_0,$$

را در نظر بگیرید.

(الف) مرتبه روش را به دست آورید.

(ب) به ازای چه مقادیری از θ ، روش همگراست.

(پ) به ازای $\theta = 0$ و $\theta = 1$ ، بازه پایداری روش را به دست آورید.

(۵) (الف) نشان دهید خطای برشی موضعی حاصل از به کارگیری روش ذوزنقه‌ای

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})], \quad n = 0, 1, \dots, N,$$
$$y_0 = y(x_0),$$

روی مساله آزمون

$$y' = \lambda y, \quad x_0 \leq x \leq X_M,$$
$$y(x_0) = y_0,$$

که در آن λ یک مقدار مشخص است، در رابطه

$$\tau(x, h) = \frac{\phi(e^{\lambda h}, \lambda h)}{h} y(x),$$

که در آن $\phi(r, \alpha) = r - 1 - \frac{\alpha}{2}(r + 1)$ ، صدق می‌کند.

(ب) آیا از قسمت (الف)، سازگاری روش نتیجه می‌شود؟ جواب خود را به طور کامل تشریح کنید.

(پ) ناحیه پایداری مطلق روش را به دست آورید.

«موفق باشید»